

I Notion d'incertitude

I.1) Variabilité de la mesure

Une mesure d'une grandeur est un processus parfois complexe impliquant plusieurs opérations soumises à de nombreux aléas incontrôlables. Par conséquent la répétition du processus de mesure conduit généralement à des valeurs différentes. Cette variabilité est naturelle et fait intrinsèquement partie de la mesure.

Les causes de la variabilité sont diverses :

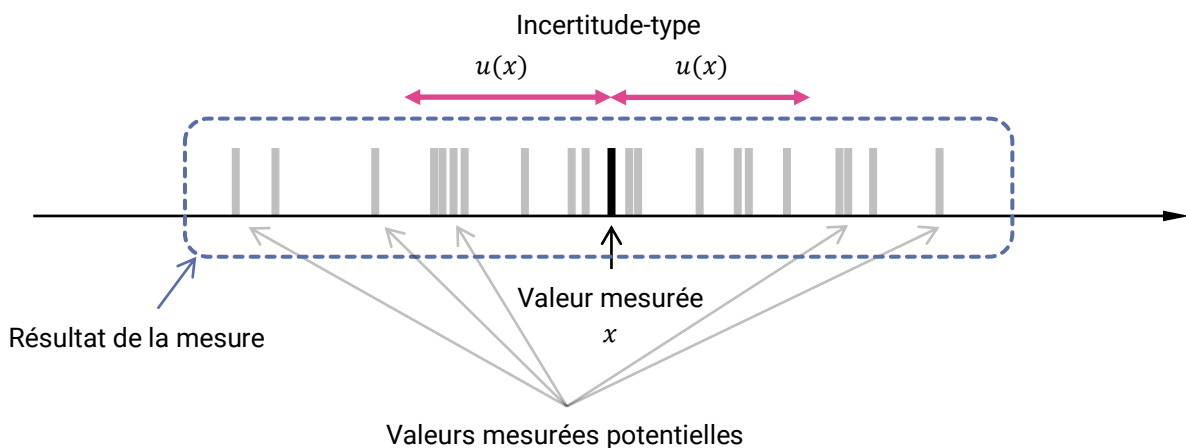
- la résolution des appareils de mesure limite la précision avec laquelle on peut donner le résultat de la mesure, ce qui donne une latitude pour apprécier la valeur exacte de la grandeur mesurée ;
- l'agitation thermique et le bruit électromagnétique génèrent des fluctuations aléatoires qui affectent le résultat affiché ;
- la manipulation humaine est source d'erreur : non seulement nos sens sont limités, mais notre capacité à reproduire un protocole de mesure correct nécessite un long apprentissage.

En acquérant chaque année des nouvelles connaissances et de nouvelles compétences, vous allez patiemment réussir à faire diminuer votre impact personnel sur la variabilité de vos mesures !

I.2) Incertitude-type

Pour prendre en compte cette variabilité, le résultat d'une mesure ne se limite pas à une seule valeur, mais à l'**ensemble des valeurs raisonnablement attribuables à la grandeur mesurée**. L'incertitude est une indication de la dispersion de cet ensemble de valeurs.

Pour évaluer l'incertitude de la mesure de la grandeur x , on définit l'**incertitude-type** notée $u(x)$ comme l'**écart-type** de la distribution des valeurs potentielles. Elle représente l'écart moyen entre deux valeurs potentielles pour la grandeur mesurée.



On définit aussi l'**incertitude-type relative** $\frac{u(x)}{x}$ qui représente la **précision** de la mesure.

I.3) Écriture du résultat d'une mesure

Le résultat d'une mesure est donc constitué de la valeur mesurée $x = \dots$ et de l'incertitude-type $u(x) = \dots$, que l'on peut écrire sous forme compacte :

$$x \pm u(x)$$

Remarque : l'incertitude est elle-même incertaine. On choisit de limiter son écriture à **deux chiffres significatifs au plus**, ce qui nécessite d'arrondir (à la hausse le plus souvent).

Pour que l'écriture soit cohérente, il faut donner la valeur mesurée avec la **même unité pour le dernier chiffre significatif** que pour l'incertitude-type. Cela nécessite parfois de rajouter des 0 à droite.

Exemple : on mesure à la règle millimétrée une longueur $L = 210$ mm avec une incertitude-type $u(L) = 0,14437$ mm. On arrondit à la hausse : $u(L) = 0,15$ mm puis on écrit la valeur mesurée avec la même unité de résolution, c'est-à-dire le $1/100^{\text{ème}}$ de mm : $L = 210,00$ mm.

Pour conclure le résultat de la mesure s'écrit $L = 210,00 \pm 0,15$ mm.

Remarque : en TP on se contentera de donner l'incertitude-type du résultat final avec **un seul chiffre significatif**.

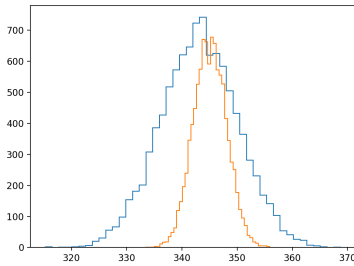
I.4) Comparaison de mesures

Une même grandeur peut être mesurée de différentes manières. La valeur de la grandeur doit être une valeur potentielle commune aux deux mesures : dans ce cas on dit que les mesures sont compatibles. Pour ce faire, l'écart entre les mesures mesurées ne doit pas être trop grand par rapport à leurs incertitudes.

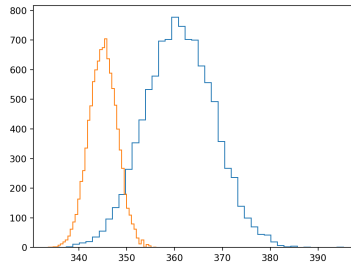
Ceci conduit à la définition d'un critère quantitatif nommé **écart-normalisé** E_N (parfois nommé « z-score »). Pour deux processus de mesures de la grandeur x donnant les valeurs mesurées x_1 et x_2 avec les incertitudes-types respectives $u(x_1)$ et $u(x_2)$, on a :

$$E_N = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{u(x_1)^2 + u(x_2)^2}}$$

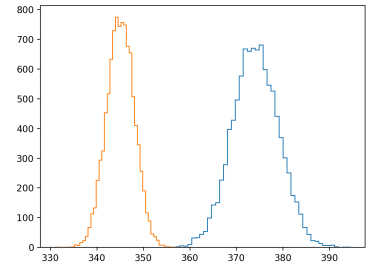
Exemples :



(a) Deux distributions avec $E_N \approx 0.3$.



(b) Deux distributions avec $E_N \approx 2.1$.



(c) Deux distributions avec $E_N \approx 5.0$.

Deux mesures sont considérées comme **compatibles** si :

$$E_N \leq 2$$

Si $E_N > 2$, les mesures sont considérées comme incompatibles. Cela reste possible, mais c'est souvent dû à une sous-évaluation des incertitudes, voire à une erreur de manipulation.

Remarque : le plus souvent, on souhaite comparer une valeur mesurée à une **valeur de référence**. On peut négliger l'incertitude de cette dernière, et l'écart normalisé devient :

$$E_N = \frac{|x_{\text{mes}} - x_{\text{ref}}|}{u(x_{\text{mes}})}$$

II Évaluation de l'incertitude-type

II.1) Type A : variabilité observée

Lorsque la variabilité des mesures est accessible, il convient de répéter un grand nombre de fois le processus de mesure pour obtenir un ensemble de N valeurs $\{x_i, i \in \llbracket 1, N \rrbracket\}$.

Une approche **statistique** permet alors de calculer la moyenne arithmétique $\bar{x}$ et l'**écart-type expérimental** s_x :

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_i x_i \quad \text{et} \quad s_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_i (x_i - \bar{x})^2}$$

L'écart-type expérimental représente alors l'incertitude-type **sur une unique réalisation de la mesure** : $u(x) = s_x$.

Cependant, le fait de disposer de plusieurs mesures permet de gagner en précision. En effet, si on imagine effectuer plusieurs fois une série de N mesures, les valeurs moyennes obtenues sont beaucoup moins dispersés que les valeurs au sein d'une même série.

Cela revient à changer la méthode de mesure : il ne s'agit plus de « mesurer un point à l'aide d'un protocole », mais de « mesurer la moyenne de N points effectués avec le même protocole ».

Cette expérience est différente et a donc une incertitude-type différente. L'incertitude-type sur la valeur de la moyenne $\bar{x}$ d'une série de N valeurs est évaluée à partir de l'écart-type expérimental s_x de la série :

$$u(\bar{x}) = \frac{s_x}{\sqrt{N}}$$

II.2) Type B : variabilité non-observée

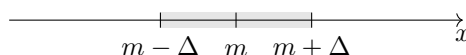
Pour certaines expériences, on retrouve systématiquement le même résultat en reproduisant la mesure. C'est par exemple le cas lorsque l'on mesure naïvement la taille d'un objet avec la même règle graduée.

Cette absence de variabilité observée ne signifie pas qu'il n'y a pas d'incertitude de mesure. Celle-ci vient de la latitude dont on dispose sur la valeur du résultat, qui est liée à la résolution de l'appareil de mesure.

Dans d'autres situations, il n'est parfois pas matériellement possible (ou souhaité) de reproduire le processus de mesure.

Dans tous ces cas, une seule valeur est accessible et il faut tout de même estimer son incertitude-type, sans observer la variabilité. Ceci se fait à l'aide d'un jugement scientifique affiné par l'expérience de l'expérimentateur, mais qui demeure en partie arbitraire.

En pratique, on estime la plus petite plage dans laquelle l'expérimentateur est **certain** de trouver la valeur recherchée. On note m la valeur centrale de cette plage et Δ sa **demi-largeur**. Autrement dit, l'expérimentateur est certain de trouver la valeur recherchée dans l'intervalle $[m - \Delta, m + \Delta]$.



La valeur mesurée est m et l'incertitude-type vaut (en supposant une répartition uniforme dans l'intervalle) :

$$u(x) = \frac{\Delta}{\sqrt{3}}$$

Exemples :

- pour un appareil gradué, on prendra en général pour Δ une demi-graduation.

Par exemple, pour une mesure avec une règle graduée au mm, on choisit $\Delta = 0,5$ mm. Alors l'incertitude-type sur la mesure vaut : $u(x) = 0,29$ mm.

Remarque : si la mesure tombe pile sur une graduation, l'incertitude correspond à l'épaisseur du trait, qui est bien plus faible.

- pour un appareil numérique, la notice fournit la valeur de Δ , qui parfois doit être calculée en fonction du calibre utilisée.

III Composition des incertitudes

Très souvent, la mesure expérimentale n'est pas le résultat recherché de l'expérience. Il faut souvent combiner des mesures entre elles pour obtenir le résultat souhaité. L'incertitude-type sur le résultat est donnée par une **formule de propagation** en fonction des incertitudes-types des données mesurées utilisées.

Expression	Formule de propagation
$y = \alpha x$	$u(y) = \alpha u(x)$
$y = x_1 + x_2$ $y = x_1 - x_2$	$u(y) = \sqrt{(u(x_1))^2 + (u(x_2))^2}$
$y = x_1 \times x_2$ $y = \frac{x_1}{x_2}$	$\frac{u(y)}{y} = \sqrt{\left(\frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2}$
$y = x^\alpha$	$\frac{u(y)}{y} = \alpha \frac{u(x)}{x}$
$y = k x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$	$\frac{u(y)}{y} = \sqrt{\alpha_1^2 \left(\frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \alpha_2^2 \left(\frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2}$