Sup MPSI, Lycée Jean Perrin, 8 Septembre 2025.

Fiche 3 : Formule du binôme.

Exercice 1

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer les sommes "doubles" :

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (i+j) \quad ; \quad \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j}$$

Exercice 2

Pour $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, rappeler la valeur de $\sum_{k=0}^{n} a^k$.

On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} k a^k$.

Calculer $aS_n - S_n$ et en déduire la valeur de S_n.

Exercice 3

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ l'aide du symbole ! et/ou de puissances, écrire les produits suivants :

1. $P_1 = 2 \times 4 \times 8 \times \cdots \times (2^n)$
2. $P_2 = 2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)$
3. $P_3 = 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)$

Exercice 4

Simplifier les produits suivants :

$$P_1 = \prod_{1 \leq k \leq n} \frac{k}{k+1}$$

$$P_2 = \prod_{2 \leq k \leq n} \frac{k^2-1}{k^2}$$

Exercice 5

À l'aide de la formule du binôme, pour $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier :

1. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}$
2. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}$
3. $\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \text{ pair}}} \binom{n}{i} = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots$
4. $\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \text{ impair}}} \binom{n}{i} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \ldots$

Exercice 6

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de $p \in [\![0, 2n]\!]$ le nombre $\binom{2n}{p}$ est maximal.
Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de $p \in [\![0, 2n+1]\!]$ le nombre $\binom{2n+1}{p}$ est maximal.

Exercice 7 (Difficile)

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$$

1. Par récurrence forte, montrer que pour $n > 1$, le réel u_n s'écrit comme le quotient d'un entier impair par un entier pair.
2. En déduire que pour tout entier $n > 1$, u_n n'est pas un entier.

Indication : On pourra séparer les cas pair et impair et observer que pour n entier :

$$u_{2n+1} = u_{2n} + \frac{1}{2n+1}$$

$$u_{2n+2} = \frac{1}{2} u_{n+1} + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n+1}$$