Chapitre P1

Cinématique du point

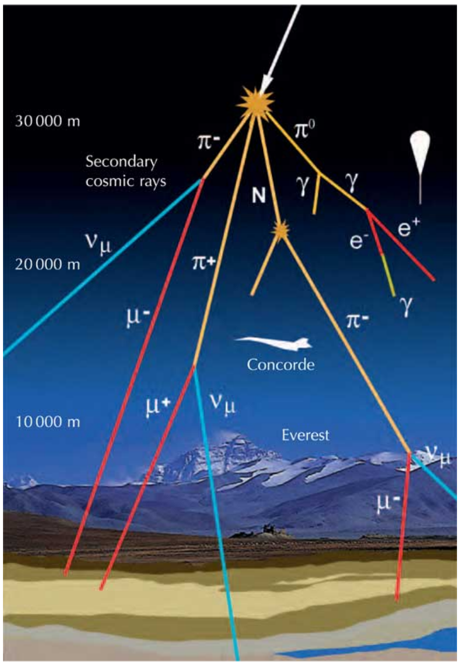
Notions et contenus	Capacités exigibles
Repérage dans l'espace et dans le temps	
Espace et temps classiques. Notion de référentiel. Caractère relatif du mouvement. Caractère absolu des distances et des intervalles de temps.	Citer une situation où la description classique de l'espace ou du temps est prise en défaut.
Cinématique du point	
Description du mouvement d'un point. Vecteurs position, vitesse et accélération. Systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.	Exprimer à partir d'un schéma le déplacement élémentaire dans les différents systèmes de coordonnées, construire le trièdre local associé et en déduire géométriquement les composantes du vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes et cylindriques. Établir les expressions des composantes des vecteurs position, déplacement élémentaire, vitesse et accélération dans les seuls cas des coordonnées cartésiennes et cylindriques.
	Identifier les degrés de liberté d'un mouvement. Choisir un système de coordonnées adapté au problème.
Mouvement à vecteur accélération constant.	Exprimer le vecteur vitesse et le vecteur position en fonction du temps. Établir l'expression de la trajectoire en coordonnées cartésiennes.
Mouvement circulaire uniforme et non uniforme.	Exprimer les composantes du vecteur position, du vecteur vitesse et du vecteur accélération en coordonnées polaires planes.
Repérage d'un point dont la trajectoire est connue. Vitesse et accélération dans le repère de Frenet pour une trajectoire plane.	Situer qualitativement la direction du vecteur vitesse et du vecteur accélération pour une trajectoire plane. Exploiter les liens entre les composantes du vecteur accélération, la courbure de la trajectoire, la norme du vecteur vitesse et sa variation temporelle. *Capacité expérimentale : réaliser et exploiter quantitativement un enregistrement vidéo d'un mouvement : évolution temporelle des vecteurs vitesse et accélération.*

Questions de cours

- Définir un référentiel.
- Citer une situation où la description classique de l'espace ou du temps est prise en défaut.
- Définir les systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques ou sphériques.
- Exprimer à partir d'un schéma le déplacement élémentaire dans les différents systèmes de coordonnées ; construire le trièdre local associé.
- Établir les expressions des composantes des vecteurs position, déplacement élémentaire, vitesse et accélération dans les cas des coordonnées cartésiennes ou cylindriques.
- Exprimer le vecteur vitesse et le vecteur position en fonction du temps pour un mouvement à vecteur accélération constant. Établir l'expression de sa trajectoire en coordonnées cartésiennes.
- Exprimer les composantes du vecteur position, du vecteur vitesse et du vecteur accélération en coordonnées polaires planes pour un mouvement circulaire.
- Définir le repère de Frenet pour une trajectoire plane et exprimer les vecteurs vitesse et accélération dans ce repère.

Document 1. Muons

La Terre est arrosée constamment par une pluie de particules, nommée rayonnement cosmique. Ce phénomène est le résultat de l'arrivée de particules énergétiques (provenant du Soleil, de la galaxie et plus globalement de tout l'Univers) dans la haute atmosphère terrestre. Ces particules, principalement des protons (87 %) entrent en collision avec les noyaux des molécules de l'atmosphère.



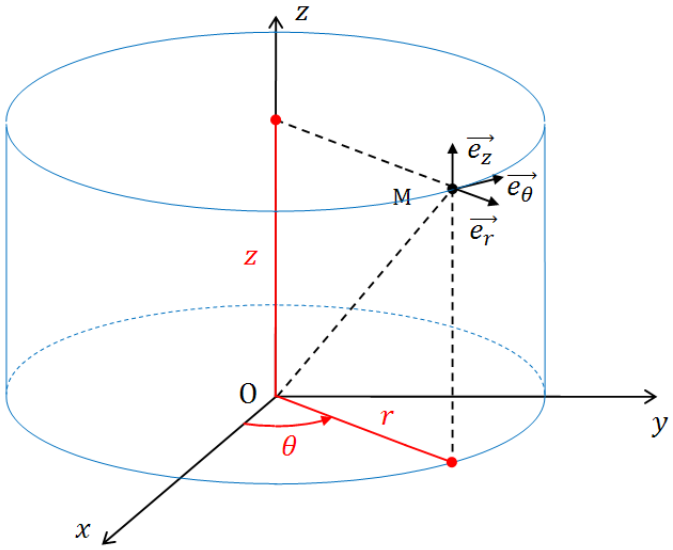
Les produits de ces collisions primaires heurtent à leur tour d'autres noyaux produisant ainsi une gerbe de particules secondaires. Certaines parviennent jusqu'au sol, d'autres sont absorbées par l'atmosphère, et d'autres encore induisent de nouvelles réactions qui donneront naissance à des particules tertiaires, etc…

Une seule particule cosmique très énergétique peut générer une gerbe contenant plusieurs milliards de particules. Plusieurs types de particules atteignent le sol. Parmi ces particules on trouve les muons.

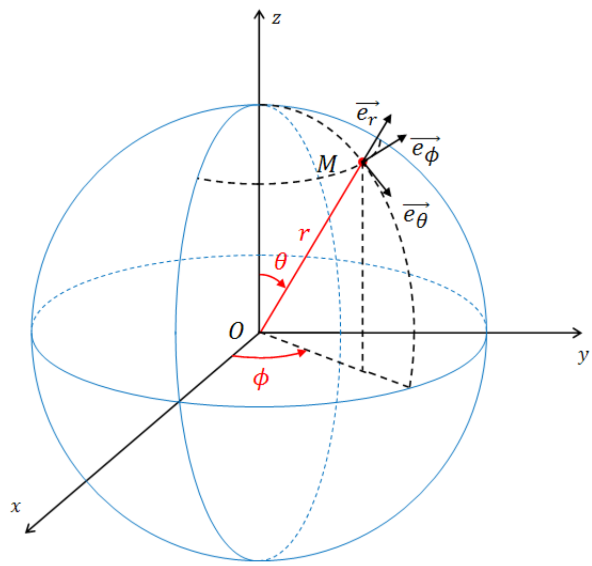
Les muons sont des particules élémentaires voisines de l'électron mais beaucoup plus massives. Ceux qui sont observés au niveau du sol sont créés dans la haute atmosphère à 20 km d'altitude, lors de la collision de protons (appartenant au rayonnement cosmique) avec les noyaux des atomes de l'atmosphère. Ils voyagent à une vitesse de valeur très élevée ($v = 0{,}9997\,c$). Pour un observateur terrestre, 67 µs sont nécessaires aux muons pour traverser l'atmosphère et atteindre le sol. Or, les muons sont très instables et diverses expériences ont montré que leur durée de vie propre n'est que 2,2 µs. Cette durée de vie est donc a priori insuffisante pour leur permettre d'atteindre la surface de la Terre.

Pourtant des muons sont effectivement détectés au niveau du sol. Cette apparente contradiction s'explique par la dilatation des durées dans le cadre de la théorie de la relativité restreinte. En effet, la durée de vie des muons Δt mesurée sur Terre et la durée de vie propre des muons Δt_0 qui se déplacent par rapport à la Terre ont des valeurs différentes. Ces deux durées sont liées par la relation de dilatation des durées $\Delta t = \gamma \Delta t_0$ avec $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ nommé facteur de Lorentz.

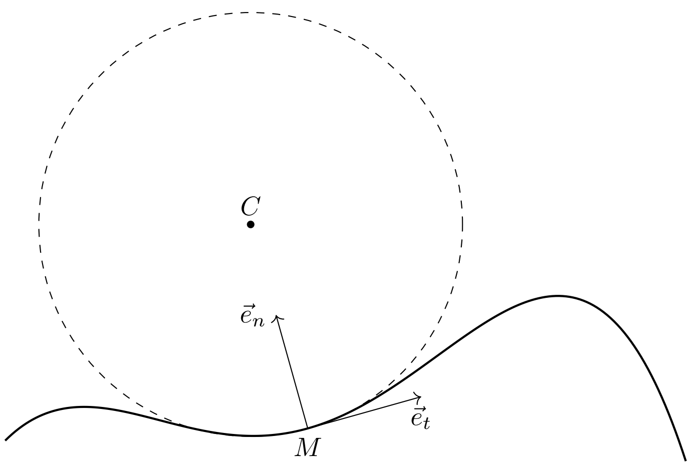
Document 2. Système de coordonnées cylindriques



Document 3. Système de coordonnées sphériques



Document 4. Base de Frenet



Exercice de cours A. Étude d'un mouvement

On considère un point M dont les coordonnées cartésiennes dépendent du temps, avec :

$$x(t) = 2t^2, \quad y(t) = 4t + 7 \quad \text{et} \quad z(t) = t(2 - t)$$

1. Calculer les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{v}$ ainsi que sa norme.
2. En déduire l'expression du vecteur déplacement élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$.
3. Calculer les coordonnées du vecteur accélération $\vec{a}$, ainsi que sa norme.
4. Calculer $\vec{v} \cdot \vec{a}$. Que peut-on dire de l'accélération du mouvement ?

Exercice de cours B. Course poursuite

Un conducteur roule à vitesse constante $v_0 = 100\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$ sur une route départementale rectiligne. Un gendarme repère l'automobiliste et démarre sa moto à l'instant $t = 0$ où la voiture passe à sa hauteur. Il accélère uniformément et atteint la vitesse de $v_1 = 90\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$ à l'instant $t_1 = 10\,\mathrm{s}$, tout en continuant à accélérer. On suppose que les véhicules se déplacent dans la direction et le sens de $\vec{e}_x$ et que le gendarme se trouve initialement à l'origine du repère.

1. Exprimer les vecteurs accélération $\vec{a}_a$ et $\vec{a}_g$ de l'automobiliste et du gendarme.
2. Exprimer les distances $x_a(t)$ et $x_g(t)$ parcourues par l'automobiliste et le gendarme.
3. Exprimer, puis calculer le temps t_f nécessaire au gendarme pour rattraper l'automobiliste.
4. Exprimer, puis calculer la distance D alors parcourue.
5. Exprimer, puis calculer la vitesse v_f du gendarme lors de l'interception.

Exercice de cours C. Mouvement uniformément accéléré

Soit un point M en mouvement uniformément accéléré d'accélération $\vec{a} = a\vec{e}_z$ dans un référentiel $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. À un instant choisi comme origine des dates ($t = 0$), le point M se trouve en O avec la vitesse $\vec{v}_0$ située dans le plan $(\vec{e}_x, \vec{e}_z)$.

1. Déterminer les équations horaires de la vitesse, puis de la position.
2. Éliminer le temps t des dernières équations horaires afin de trouver une relation entre les coordonnées du point M. Quelle est la nature de la trajectoire ?

Exercice de cours D. Pale d'hélicoptère

Les pales d'un hélicoptère tournent à vitesse angulaire constante ω_0 dans un plan horizontal. On s'intéresse au mouvement d'un point M d'une pale situé à la distance R de l'axe de rotation. On se place dans le référentiel lié au corps de l'hélicoptère.

1. Choisir le système de coordonnées approprié.
2. Donner les expressions des vecteurs position, vitesse et accélération du point M dans la base associée à ce système de coordonnées.
3. On arrête le moteur, la vitesse angulaire évolue ensuite selon la loi $\omega(t) = \omega_0 \exp(-\alpha t)$. En déduire l'équation horaire pour la position (dans le système de coordonnées choisies). De quel angle la pale tourne-t-elle avant de s'arrêter ?

Exercice 1. Ballon sonde (★)

Un ballon sonde est lâché depuis le point O du sol à l'instant $t = 0$. Il acquiert quasi-instantanément une vitesse verticale v_0 qui demeure constante tout au long du mouvement. Le vent lui communique une vitesse horizontale suivant l'axe (Ox) proportionnelle à son altitude z, $v_x = z/\tau$ où τ est homogène à un temps.

1. Déterminer l'expression de $z(t)$.
2. En déduire $x(t)$, à exprimer en fonction de v_0 et τ.
3. En déduire l'équation $x(z)$ de la trajectoire du ballon sonde. Quelle est sa nature ?

Exercice 2. Manège (★)

Un manège est constitué d'un plateau circulaire horizontal, de centre O, pouvant tourner dans le référentiel terrestre en effectuant un tour en une durée T avec une vitesse angulaire constante autour de son axe vertical.

Un enfant est assis sur un cheval de bois oscillant sinusoïdalement avec une amplitude h et une pulsation ω sur un axe vertical situé à la distance a de l'axe du manège.

1. Quel système de coordonnées faut-il choisir pour décrire ce mouvement dans le référentiel terrestre ?
2. Donner les équations horaires de ces coordonnées.
3. Exprimer les équations horaires de la vitesse, puis déterminer la vitesse instantanée.
4. Même question pour l'accélération.
5. En déduire la valeur maximale de l'accélération pour $a = 3\,\mathrm{m}$, $h = 50\,\mathrm{cm}$, $T = 20\,\mathrm{s}$, $\omega = 1{,}0\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Comparer à l'accélération de la pesanteur $g = 9{,}8\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$.

Exercice 3. Ascenseur (★★)

Initialement immobile au niveau du sol, un ascenseur est animé d'un mouvement rectiligne vertical ascendant :

- uniformément accéléré d'accélération $a_a = 2{,}00\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$ pendant une durée $t_a = 3{,}00\,\mathrm{s}$;
- uniforme pendant une durée $t_u = 7\,\mathrm{s}$;
- uniformément décéléré d'accélération de norme $a_d = 1{,}00\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$ pendant une durée t_d jusqu'à l'arrêt.

1. Tracer la courbe représentant la vitesse en fonction du temps et en déduire la durée t_d.
2. Déterminer la distance totale parcourue à partir de ce graphe.
3. Déterminer la position en fonction du temps. Tracer l'allure de la courbe.

Exercice 4. Spirale logarithmique (★★)

On donne les équations horaires du mouvement plan d'un point matériel M en coordonnées polaires :

$$r(t) = be^{-t/\tau} \quad \text{et} \quad \theta(t) = \omega t$$

1. Déterminer les expressions des vecteurs vitesse et accélération.
2. Déduire la norme de ces vecteurs.
3. Calculer le produit scalaire $\vec{v}\cdot\vec{a}$ et en déduire l'angle formé entre le vecteur accélération et le vecteur vitesse. Commenter.
4. Quelle est la distance totale L parcourue par le point au bout d'un temps très long ?

Exercice 5. Lance-pierre (★★)

Un enfant muni d'un lance-pierre vise une pomme située sur un arbre. Au moment où il tire sa pierre avec une vitesse initiale v_0, la pomme se détache sans vitesse initiale. La pierre et la pomme évoluent avec la même accélération égale au champ de pesanteur $\vec{g}$ vertical.

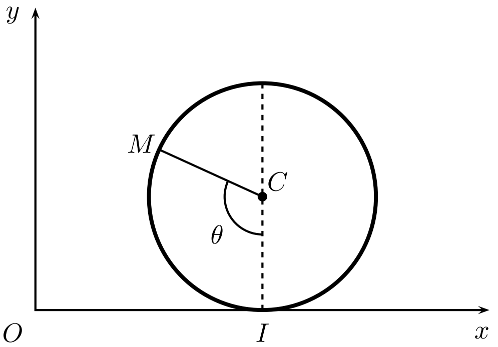
On se place dans le référentiel terrestre muni d'un repère $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ de centre le point de départ de la pierre, d'axe $\vec{e}_z$ vertical ascendant. À $t = 0$, la pomme se trouve au point de coordonnées $(D, 0, H)$.

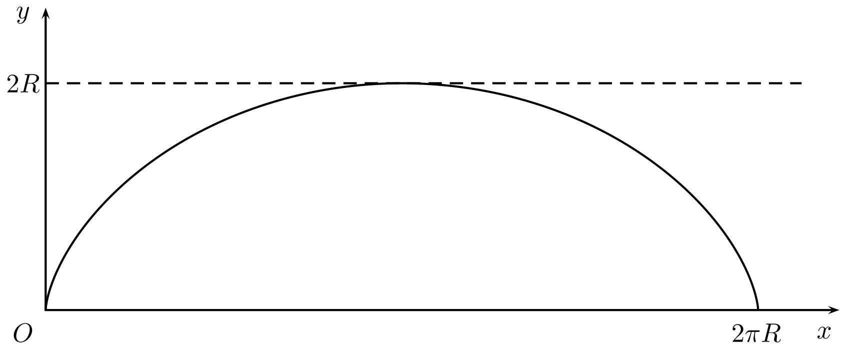
1. Déterminer les équations horaires du mouvement de la pomme.
2. Même question pour la pierre.
3. La pierre touche-t-elle la pomme ?

Exercice 6. Cycloïde (★★)

Une roue de centre C et de rayon R roule sur l'horizontale Ox (schéma ci-dessous à gauche). On s'intéresse au mouvement d'un point M à la périphérie de la roue, dont la trajectoire est une cycloïde (schéma de droite).

On note θ l'angle $(\widehat{CM, CI})$. À l'instant $t = 0$, M est au point O et $\theta = 0$.





1. La roue roule sans glisser sur le sol. En déduire une relation entre l'abscisse x_C du centre de la roue, R et θ.
2. Donner l'expression des coordonnées cartésiennes x et y du point M en fonction de R et de θ.
3. Montrer que le vecteur vitesse de M est à tout instant orthogonal au vecteur $\overrightarrow{IM}$.
4. Exprimer le déplacement élémentaire $\mathrm{d}\ell = ||\mathrm{d}\overrightarrow{OM}||$ en fonction de θ et $\mathrm{d}\theta$. En déduire la longueur de l'arc de cycloïde correspondant à un tour de roue.

Exercice 7. Parking hélicoïdal (★★)

On considère un parking en colimaçon, constitué d'une rampe hélicoïdale de rayon $R = 20\,\mathrm{m}$ et de pas $h = 4\,\mathrm{m}$ (hauteur entre deux niveaux). Un automobiliste la remonte avec une vitesse constante $v_0 = 10\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

Déterminer la norme de son accélération.

Exercice 8. Poursuite de chats (★★★)

Quatre chats se trouvent aux sommets d'un carré de centre O. Il se poursuivent les uns les autres : le premier court après le second, qui poursuit le troisième, qui poursuit le quatrième, qui lui-même poursuit le premier. Leur vitesse v est identique et constante pendant toute la poursuite, et le vecteur vitesse de chaque chat est constamment orienté vers le chat suivant. De cette façon, les chats se trouvent à tout instant aux sommets d'un carré de centre O.

Considérons l'un des chats noté M. On décrit sous mouvement en coordonnés polaires. Initialement $r(t = 0) = r_0$ et $\theta(t = 0) = 0$.

1. Représenter les 4 chats (sous forme de points) à un instant t quelconque. Reprsénter le vecteur vitesse des chats. Quelles sont les composantes du vecteur vitesse de M dans la base polaire ?
2. En utilisant l'expression générale de ces composantes, en déduire l'équation horaire $r(t)$.
3. Combien de temps dure la poursuite ? Quelle est la distance parcourue par chacun des chats ?
4. Déterminer l'équation horaire $\theta(t)$.
5. En déduire l'équation de la trajectoire en polaire $r = f(\theta)$.

Réponses

Exercice 1 : 3. $x = \dfrac{z^2}{2v_0\tau}$.

Exercice 2 : 2. $r(t) = a$; $\theta(t) = 2\pi t/T$; $z(t) = h\cos(\omega t)$; 5. $a_{\max} = 0{,}58\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Exercice 3 : 2. $d = 69\,\mathrm{m}$.

Exercice 4 : 1. $\vec{v} = \dfrac{b}{\tau}e^{-t/\tau}(-\vec{e}_r + \omega\tau\vec{e}_\theta)$; $\vec{a} = \dfrac{b}{\tau^2}e^{-t/\tau}((1-\omega^2\tau^2)\vec{e}_r - 2\omega\tau\vec{e}_\theta)$; 3. $\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}$; 4. $L = b\sqrt{1+\omega^2\tau^2}$.

Exercice 5 : 2. $x = R(\theta - \sin(\theta))$; $y = R(1 - \cos(\theta))$; 4. $L = 8\,R$.

Exercice 6 : $a = \dfrac{4\pi^2 R v_0^2}{4\pi^2R^2 + h^2} = 0{,}39\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Exercice 7 : 2. $r(t) = r_0 - vt/\sqrt{2}$; 5. $r = r_0\,e^{-\theta}$.