I Produit scalaire

Pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on définit le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$:

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\theta)}$$

où θ est l'angle formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
En particulier, si $\vec{u} = \vec{v}$, $\theta = 0$ d'où :

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{u} = ||\vec{u}||^2}$$

Propriété générale : le produit scalaire est une application de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

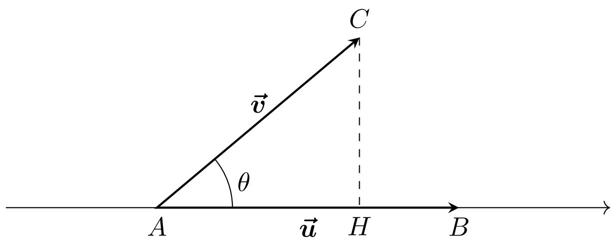
— **bilinéaire** : $(a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2) \cdot (b_1\vec{v}_1 + b_2\vec{v}_2) = a_1b_1\, \vec{u}_1 \cdot \vec{v}_1 + a_1b_2\, \vec{u}_1 \cdot \vec{v}_2 + a_2b_1\, \vec{u}_2 \cdot \vec{v}_1 + a_2b_2\, \vec{u}_2 \cdot \vec{v}_2$;

— et **symétrique** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.

Propriété géométrique : le produit scalaire est obtenu par projection orthogonale. Soit $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overline{AB} \times \overline{AH} = \pm AB.AH$$

où $\overline{AB}$ et $\overline{AH}$ sont les distances algébriques sur la droite (AB) orientée.



En particulier, le produit scalaire d'un vecteur sur une base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ donne les coordonnées du vecteur dans la base :

$$\vec{u} = u_1\, \vec{e}_1 + u_2\, \vec{e}_2 + u_3\, \vec{e}_3 \qquad \text{avec} \quad u_i = \vec{u} \cdot \vec{e}_i$$

II Produit vectoriel

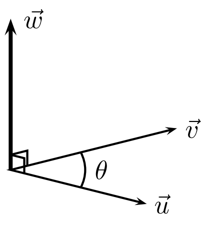
Pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on définit le produit vectoriel $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ qui est un vecteur :

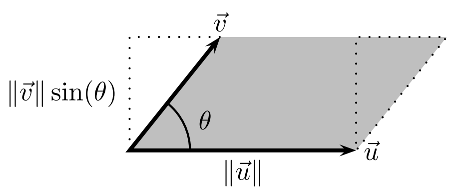
- dirigé **perpendiculairement** aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$;
- de sens tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ forme un **trièdre direct** (règle de la main droite) ;
- de norme $\boxed{\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\theta)}$ où θ est l'angle formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Cette norme est égale à l'aire du parallélogramme construit à partir des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Propriété générale : le produit vectoriel est une application de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

— **bilinéaire** : $(a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2) \wedge (b_1\vec{v}_1 + b_2\vec{v}_2) = a_1b_1\, \vec{u}_1 \wedge \vec{v}_1 + a_1b_2\, \vec{u}_1 \wedge \vec{v}_2 + a_2b_1\, \vec{u}_2 \wedge \vec{v}_1 + a_2b_2\, \vec{u}_2 \wedge \vec{v}_2$;

— et **antisymétrique** : $\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$.





Pour calculer un produit vectoriel dans une base orthonormée directe $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, il suffit (grâce à la bilinéarité) de connaître les produits scalaires des vecteurs de base :

$$\boxed{\begin{array}{lll} \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \vec{e}_3 & \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 = \vec{e}_1 & \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \\ \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3 = -\vec{e}_2 & \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_1 = -\vec{e}_3 & \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_2 = -\vec{e}_1 \\ \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_1 = \vec{0} & \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_2 = \vec{0} & \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_3 = \vec{0} \end{array}}$$