Sup MPSI, Lycée Jean Perrin, 15 Septembre 2025.

DM 1, Pour le 22-09-2025.

Exercice 1

1. Montrer que si n est un entier naturel alors :

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$

2. Réciproquement, on considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de réels tous strictement positifs tel que :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2$$

   Que pouvez vous dire de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

Exercice 2

Le but de l'exercice est de démontrer que l'équation $x^2 - 2y^2 = 1$ avec x, y des entiers naturels admet une infinité de solutions

1. Soit n entier naturel. Démontrer qu'il existe deux entiers naturels x_n et y_n tels que

$$\begin{cases} (3+2\sqrt{2})^n = x_n + \sqrt{2}y_n \\ (3-2\sqrt{2})^n = x_n - \sqrt{2}y_n \end{cases}$$

2. Démontrer le résultat annoncé.
   Si besoin, on peut admettre que $\sqrt{2}$ est un irrationnel.