Fiche 7 : TD du 18-09.

Exercice 1

On cherche à résoudre l'équation
$$z^3+(1+i)z^2+(i-1)z-i=0.$$

1. Rechercher une solution imaginaire pure ai à l'équation avec $a\in\mathbb{R}$.
2. Déterminer $b,c\in\mathbb{R}$ tels que
$$z^3+(1+i)z^2+(i-1)z-i=(z-ai)(z^2+bz+c).$$
3. En déduire toutes les solutions de l'équation.
4. Sur le même modèle, résoudre l'équation $z^3-(2+i)z^2+2(1+i)z-2i=0$.

Exercice 2

1. Établir la formule de trigonométrie $\cos^4(\theta)=\cos(4\theta)/8+\cos(2\theta)/2+3/8$.
2. Fournir une relation analogue pour $\sin^4(\theta)$ et $\cos^2(\theta)\sin^3(\theta)$.

Exercice 3

On cherche à déterminer tous les réels t tels que
$$\cos(t)=\frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

1. Démontrer qu'il existe une unique solution dans l'intervalle $]0,\pi/4[$. Dans la suite, on notera cette solution t_0.
2. Calculer $\cos(2t_0)$, puis démontrer que $\cos(4t_0)=-\cos(t_0)$.
3. En déduire t_0.
4. Résoudre l'équation.

Exercice 4

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $x,y\in\mathbb{R}$. Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(x+ky)$;
2. $\displaystyle S=\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos(kx)}{(\cos x)^k}$ et $\displaystyle T=\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin(kx)}{(\cos x)^k}$, avec $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$;
3. $\displaystyle D_n=\sum_{k=-n}^{n}e^{ikx}$, avec $x\neq 0+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Exercice 5

Dans le plan complexe orienté on considère A,B,C,D 4 points situés dans cet ordre sur le cercle trigonométrique. On note P,Q,R,S les milieux respectifs des arcs (orientés) AB,BC,CD,DA de Γ.

Montrer que les segments $[PR]$ et $[QS]$ sont orthogonaux.