Exercice 1. Ballon sonde

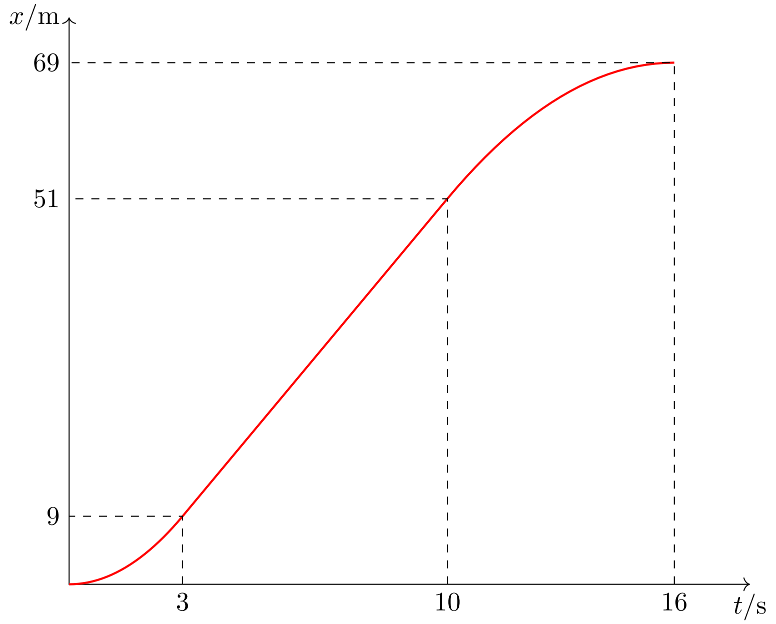
1. Le mouvement sur (Oz) est uniforme à la vitesse v_0 soit $v_z = \dot{z} = v_0$. La solution de condition intiale $z(0) = 0$ est $\boxed{z(t) = v_0 t}$.
2. $v_x = z/\tau$ soit $\dot{x} = (v_0/\tau)t$. La solution de condition initiale $x(0) = 0$ est $\boxed{x(t) = (v_0/\tau)t^2/2}$.
3. On expression t en fonction de z : $t = z/v_0$. On remplace dans l'expression de $x(t)$: $\boxed{x(z) = \dfrac{z^2}{2v_0\tau}}$. Il s'agit d'une parabole.

Exercice 2. Manège

1. On choisit les coordonnées cylindriques par symétrie du problème.
2. $\boxed{r(t) = a}$; $\boxed{\theta(t) = 2\pi\, t/T}$; $\boxed{z(t) = h\cos(\omega t)}$.
3. $\vec{v}(t) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z = a(2\pi/T)\vec{e}_\theta - h\omega\sin(\omega t)\vec{e}_z$.
   $v(t) = ||\vec{v}(t)|| = \sqrt{(2\pi a/T)^2 + (h\omega\sin(\omega t))^2}$.
4. $\vec{a}(t) = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -a(2\pi/T)^2\vec{e}_r - h\omega^2\cos(\omega t)\vec{e}_z$.
   $a(t) = ||\vec{a}(t)|| = \sqrt{(4\pi^2 a/T^2)^2 + (h\omega^2\cos(\omega t))^2}$.
5. $\boxed{a_{\max} = a(0) = \sqrt{(4\pi^2 a/T^2)^2 + (h\omega^2)^2}} = \underline{0{,}58\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}}$.
   C'est très inférieur à g, cette accélération est donc faible.

Exercice 3. Ascenseur

1. Le graphe $v = f(t)$ est constitué de trois portions de droites : la première de l'origine au point $A(3\,\mathrm{s}, 6\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})$, la seconde horizontale jusqu'au point $B(10\,\mathrm{s}, 6\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})$, la troisième de coefficient directeur $-a_d = -1\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ jusqu'à l'axe des abscisses qu'elle coupe à l'instant $t = 16\,\mathrm{s}$. Ainsi $\underline{t_d = 6\,\mathrm{s}}$.
2. $d = \int_0^d \mathrm{d}x = \int_0^{16} v\mathrm{d}t$. On estime l'intégrale graphiquement comme l'aire sous la courbe. $d = 9 + 42 + 18 = \underline{69\,\mathrm{m}}$.
3. Entre $t = 0$ et $t = 3\,\mathrm{s}$: $v = 2t$ donc $x = \int_0^t 2t\mathrm{d}t = t^2$, la position atteinte au bout de cette phase est $\underline{x_a = 9\,\mathrm{m}}$. Le graphe est une parabole de concavité tournée vers le haut.
   Entre $t = 3\,\mathrm{s}$ et $t = 10\,\mathrm{s}$: $v = 6\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ donc $x = 9 + \int_3^t 6\mathrm{d}t = 9 + 6(t-3) = 6t - 9$, la position atteinte au bout de cette phase est $\underline{x_u = 51\,\mathrm{m}}$. Le graphe est une droite.
   Entre $t = 10\,\mathrm{s}$ et $t = 16\,\mathrm{s}$: $v = 16 - t$ donc $x = 51 + \int_{10}^t (16-t)\mathrm{d}t = 51 + 16t - t^2/2 - 160 + 50 = -t^2/2 + 16t - 59$. Le graphe est une parabole de concavité tournée vers le bas.



Exercice 4. Spirale logarithmique

1. Vecteur vitesse : $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ soit $\boxed{\vec{v} = \dfrac{b}{\tau}e^{-t/\tau}\left(-\vec{e}_r + \omega\tau\,\vec{e}_\theta\right)}$.

   Vecteur accélération : $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta$ soit $\boxed{\vec{a} = \dfrac{b}{\tau^2}e^{-t/\tau}\left((1-(\omega\tau)^2)\,\vec{e}_r - 2\omega\tau\,\vec{e}_\theta\right)}$.

2. $\boxed{v = ||\vec{v}|| = \dfrac{b}{\tau}e^{-t/\tau}\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}$.

   $a = ||\vec{a}|| = \dfrac{b}{\tau^2}e^{-t/\tau}\sqrt{(1-(\omega\tau)^2)^2 + (2\omega\tau)^2}$ d'où $\boxed{a = \dfrac{b}{\tau^2}e^{-t/\tau}(1+(\omega\tau)^2)}$.

3. $\vec{v}\cdot\vec{a} = \dfrac{b^2}{\tau^3}\left(-((1-(\omega\tau)^2) - 2(\omega\tau)^2\right)$ soit $\boxed{\vec{v}\cdot\vec{a} = -\dfrac{b^2}{\tau^3}(1+(\omega\tau)^2)}$.

   Or $\vec{v}\cdot\vec{a} = ||\vec{v}|| \times ||\vec{a}|| \times \cos(\widehat{\vec{v},\vec{a}})$ donc $\cos(\widehat{\vec{v},\vec{a}}) = \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{||\vec{v}||\times||\vec{a}||} =$

$\dfrac{-\dfrac{b^2}{\tau^3}(1+(\omega\tau)^2)}{-\dfrac{b^2}{\tau^3}\sqrt{1+(\omega\tau)^2}(1+(\omega\tau)^2)}$. Pour conclure, $\boxed{\widehat{\vec{v},\vec{a}} = \arccos\left(-\dfrac{1}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}\right)}$.

On remarque que cet angle est constant et obtu (son cosinus est négatif) donc que le mouvement est décéléré.

4. La distance élémentaire parcourue pendant la durée dt est d$\ell = v$dt. On l'intègre pour obtenir la distance totale parcourue : $L = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{b}{\tau} e^{-t/\tau}\sqrt{1+(\omega\tau)^2}\mathrm{d}t = \frac{b}{\tau}\sqrt{1+(\omega\tau)^2}\int_0^{\infty} e^{-t/\tau}\mathrm{d}t$ donc $\boxed{L = b\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}$.

Exercice 5. Lance-pierre

1. L'accélération de la pomme est $\vec{a} = -g\,\vec{e}_z$. Puisque $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$ et que la vitesse initiale de la pomme est nulle,son vecteur vitesse à l'instant t est : $\vec{v}(t) = -gt\,\vec{e}_z$. Puisque $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OP}}{\mathrm{d}t}$ (P désignant la pomme) et que sa position initiale est $\overrightarrow{OP}(t=0) = D\,\vec{e}_x + H\,\vec{e}_z$, sa position à l'instant t est :

$$\boxed{\overrightarrow{OP}(t) = D\,\vec{e}_x + \left(H - \frac{1}{2}gt^2\right)\,\vec{e}_z}$$

2. Le vecteur vitesse initial de la pierre (point M) est dirigé vers la pomme : sa direction est celle de $\overrightarrow{OP}(t=0)$. On construit un vecteur unitaire $\vec{u}$ dans cette direction en diivisant ce vecteur par sa norme : $\vec{u} = \dfrac{\overrightarrow{OP}(t=0)}{||\overrightarrow{OP}(t=0)||} = \dfrac{D}{\sqrt{D^2+H^2}}\,\vec{e}_x + \dfrac{H}{\sqrt{D^2+H^2}}\,\vec{e}_z$.

Puisque la norme de la vitesse initiale est v_0, le vecteur vitesse initial de la pomme est : $\vec{v}(t=0) = v_0\,\vec{u} = v_0\dfrac{D}{\sqrt{D^2+H^2}}\,\vec{e}_x + v_0\dfrac{H}{\sqrt{D^2+H^2}}\,\vec{e}_z$.

Puisque l'accération est $\vec{a} = -g\,\vec{e}_z$, le vecteur vitesse de la pierre à l'instant t vaut :

$$\vec{v}(t) = v_0\frac{D}{\sqrt{D^2+H^2}}\,\vec{e}_x + \left(v_0\frac{H}{\sqrt{D^2+H^2}} - gt\right)\,\vec{e}_z$$

On primitive pour obtenir son vecteur position $\overrightarrow{OM}$. Sachant que sa position initiale est l'origine, il vient :

$$\boxed{\overrightarrow{OM}(t) = v_0t\,\frac{D}{\sqrt{D^2+H^2}}\,\vec{e}_x + \left(v_0t\,\frac{H}{\sqrt{D^2+H^2}} - \frac{1}{2}gt^2\right)\,\vec{e}_z}$$

3. La pierre touche la pomme s'il existe un instant $t > 0$ tel que $\overrightarrow{OP}(t) = \overrightarrow{OM}(t)$ soit :

$$D\,\vec{e}_x + \left(H - \frac{1}{2}gt^2\right)\,\vec{e}_z = v_0t\,\frac{D}{\sqrt{D^2+H^2}}\,\vec{e}_x + \left(v_0t\,\frac{H}{\sqrt{D^2+H^2}} - \frac{1}{2}gt^2\right)\,\vec{e}_z$$

On identifie selon $\vec{e}_x$: $D = v_0t\,\dfrac{D}{\sqrt{D^2+H^2}}$ d'où $\dfrac{v_0t}{\sqrt{D^2+H^2}} = 1$.

Selon $\vec{e}_z$: $H - \dfrac{1}{2}gt^2 = v_0t\,\dfrac{H}{\sqrt{D^2+H^2}} - \dfrac{1}{2}gt^2$ d'où $H = v_0t\,\dfrac{H}{\sqrt{D^2+H^2}}$ qui conduit de nouveau à $\dfrac{v_0t}{\sqrt{D^2+H^2}} = 1$.

La pierre touche donc la pomme à l'instant $\boxed{t = \dfrac{\sqrt{D^2+H^2}}{v_0}}$.

Remarque : cet instant n'existe pas toujours, car le mouvement peut être interrompu par l'arrivée de la pomme sur le sol. Il faut donc s'assurer que l'altitude de la pomme reste supérieure à 0 pour cet instant.

Exercice 6. Cycloïde

1. Si la roue ne glisse pas, l'arc IM a même longueur que la longueur OI parcourue au sol. Ainsi $x_C = OI = \widehat{MI}$ c'est-à-dire $\boxed{x_C = R\theta}$.
2. $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM}$ avec $\overrightarrow{OC} = x_C\vec{e}_x + R\vec{e}_y$ et $\overrightarrow{CM} = -R(\sin(\theta)\vec{e}_x + \cos(\theta)\vec{e}_y)$. On en déduit $\boxed{x = R(\theta - \sin(\theta))}$ et $\boxed{y = R(1-\cos(\theta))}$.
3. $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y$ donc $\boxed{\vec{v} = R\dot{\theta}((1-\cos(\theta))\vec{e}_x + \sin(\theta)\vec{e}_y)}$.
$\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CM} = R\vec{e}_y - R(\sin(\theta)\vec{e}_x + \cos(\theta)\vec{e}_y) = R(-\sin(\theta)\vec{e}_x + (1-\cos(\theta))\vec{e}_y)$.
On vérifie alors aisément que $\vec{v}\cdot\overrightarrow{IM} = 0$ donc que $\vec{v}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{IM}$.
Ceci signifie qu'à tout instant le point M est en rotation autour de I, le point de contact avec le sol.
4. Par définition d$\ell = ||\mathrm{d}\overrightarrow{OM}|| = ||\vec{v}||dt$.
$v^2 = ||\vec{v}||^2 = v_x^2 + v_y^2 = (R\dot{\theta})^2\left((1-\cos(\theta))^2 + (\sin(\theta))^2\right) = (R\dot{\theta})^2\left(1 - 2\cos(\theta) + \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\right) = (R\dot{\theta})^2\left(2 - 2\cos(\theta)\right) = (R\dot{\theta})^2 \times 4\sin^2(\theta/2) = \left(2R\dot{\theta}\sin(\theta/2)\right)^2$.
$\sin(\theta/2)$ est positif pour $\theta \in [0, 2\pi]$ donc $v = 2R\dot{\theta}\sin(\theta/2)$. On en déduit d$\ell = 2R\sin(\theta/2)d\theta$.
La longueur de l'arc de cycloïde se calcule en sommant les déplacements élémentaires

pour θ variant de 0 à 2π (soit un tour de roue) :

$$\boxed{L = \int \mathrm{d}\ell = \int_0^{2\pi} 2R\sin(\theta/2)\mathrm{d}\theta = 2R[-2cos(\theta/2)]_0^{2\pi} = 8R}$$

Exercice 7. Parking hélicoïdal

Soit T la durée pour faire un tour, et donc de monter d'un étage. Ainsi la vitesse angulaire dans un plan horizontal est $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ et la vitesse vertical ascentionnelle est $v_z = \dfrac{h}{T}$.
En utilisant les coordonnées cylindriques d'axe celui de la rampe :

$$\begin{cases} r(t) &= R \\ \theta(t) &= \dfrac{2\pi}{T}t \\ z(t) &= \dfrac{h}{T}t \end{cases}$$

On en déduit les coordonnées du vecteur vitesse : $\vec{v} = R\omega\vec{e}_\theta + v_z\vec{e}_z$ donc la vitesse instantanée est $v_0 = ||\vec{v}|| = \sqrt{(R\omega)^2 + v_z^2} = \dfrac{\sqrt{(2\pi R)^2 + h^2}}{T}$.

Le vecteur accélération est $\vec{a} = -R\omega^2\vec{e}_r = -\dfrac{4\pi^2 R}{T^2}\vec{e}_r$.

Or $\dfrac{1}{T^2} = \dfrac{v_0^2}{(2\pi R)^2 + h^2}$ donc $\boxed{a = ||\vec{a}|| = \dfrac{4\pi^2 R v_0^2}{4\pi^2 R^2 + h^2} = 0{,}39\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}}$.

Exercice 8. Poursuite de chats

1. D'après le schéma ci-dessous à gauche, le vecteur vitesse fait un angle $\pi/4$ avec $\vec{e}_\theta$ et $3\pi/4$ avec $\vec{e}_r$. Alors $\vec{v} = v\cos(3\pi/4)\vec{e}_r + v\cos(\pi/4)\vec{e}_\theta$ soitr $\boxed{\vec{v} = \dfrac{v}{\sqrt{2}}(-\vec{e}_r + \vec{e}_\theta)}$.
2. $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ donc $\dot{r} = \vec{v}\cdot\vec{e}_r = -v/\sqrt{2}$. On en déduit $\boxed{r(t) = r_0 - vt/\sqrt{2}}$.
3. La poursuite s'arrête quand les chats se retrouvent tous au centre, soit $r(t_f) = 0$. Cela se produit pour $t_f = \sqrt{2}r_0/v$. La distance parcourue par chaque chat est alors $\underline{d = vt_f = \sqrt{2}r_0}$.
4. $r\dot{\theta} = \vec{v}\cdot\vec{e}_\theta = v/\sqrt{2}$ donc $\dot{\theta} = v/(\sqrt{2}r) = \dfrac{v}{\sqrt{2}r_0 - vt}$. En intégrant on obtient $\boxed{\theta(t) = -\ln\left(\dfrac{\sqrt{2}r_0 - vt}{\sqrt{2}r_0}\right)}$.
5. Ce résultat se met sous la forme $\theta = -\ln(r/r_0)$ donc $\boxed{r = r_0 e^{-\theta}}$. C'est l'équation d'une spirale (logarithmique).