

En physique, de nombreuses situations physiques sont décrites par une équation différentielle linéaire à coefficient constants vérifiée par une grandeur x dépendant du temps t :

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t)$$

n est l'ordre de l'équation différentielle : on s'intéressera aux cas $n = 1$ et $n = 2$ avec $f(t) = \text{cste}$ (éventuellement nulle).

Pour résoudre une telle équation différentielle :

□ on commence par écrire sa **solution générale** sous la forme $x(t) = x_H(t) + x_P(t)$ où :

- $x_H(t)$ est la **solution générale de l'équation différentielle homogène** (sans second membre), qui comporte n constantes d'intégration ;
- $x_P(t)$ est une **solution particulière** de l'équation différentielle ; dans le cas fréquent où $f(t) = \text{cste}$, on choisit $x_P = \text{cste}$ (simple à déterminer car toutes ses dérivées s'annulent dans l'équation différentielle).

□ ensuite, on détermine les n constantes d'intégration à l'aide de n contraintes, le plus souvent obtenues par la connaissance de **n conditions initiales**.

Remarque : il faut appliquer ces contraintes sur la solution générale de l'équation différentielle, et non sur celle de l'équation homogène.

I Système du premier ordre

On s'intéresse au cas $n = 1$ dont l'équation différentielle homogène se met sous la **forme canonique** :

$$\frac{dx}{dt} + \frac{x}{\tau} = 0$$

où $\tau > 0$ est nommé **temps caractéristique**. La solution de l'équation homogène est :

$$x_H(t) = A e^{-t/\tau}$$

II Oscillateur harmonique

On s'intéresse au cas $n = 2$ mais avec $a_1 = 0$, dont l'équation différentielle homogène met sous la **forme canonique** :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

où $\omega_0 > 0$ est nommée **pulsation propre**. La solution de l'équation homogène est :

$$x_H(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

III Oscillateur harmonique amorti

On s'intéresse au cas $n = 2$ mais avec $a_1 \neq 0$, dont l'équation différentielle homogène se met sous la **forme canonique** :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

où $\omega_0 > 0$ est nommée **pulsation propre** et $Q > 0$ **facteur de qualité**. La solution de l'équation homogène dépend du signe du discriminant Δ du polynôme caractéristique associé :

$$P(r) = r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 \Rightarrow \Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2 \left(\frac{1}{4Q^2} - 1\right)$$

➤ $\Delta > 0 \Leftrightarrow Q < \frac{1}{2}$: les deux racines du polynôme caractéristique sont réelles négatives : $r_{\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$

que l'on note $r_{\pm} = -1/\tau_{\pm}$. Dans ce cas : $x_H(t) = A e^{-t/\tau_+} + B e^{-t/\tau_-}$

➤ $\Delta = 0 \Leftrightarrow Q = \frac{1}{2}$: il y a une racine double : $r_0 = -\omega_0$ que l'on note $r_0 = -1/\tau$. Dans ce cas : $x_H(t) = (A + Bt)e^{-t/\tau}$

➤ $\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > \frac{1}{2}$: il y a deux racines complexes conjuguées : $r_{\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm i\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ que l'on note $r_{\pm} = -1/\tau \pm \Omega$.

Dans ce cas : $x_H(t) = e^{-t/\tau} (A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t))$