Fiche 9 : Nombres réels.

On rappelle que pour $a > 0$ et b réel :

$$a^b = \exp(b\ln(a))$$

Exercice 1

Résoudre dans les équations d'inconnue x réel :

1. $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$ $(x > 0)$,
2. $(2^x)^2 = (2^{x^2})$,
3. $2^{(x^2)} = 3^{(x^3)}$,
4. $e^x - e^{-x} = 2\sqrt{2}$,
5. $e^x + e^{-x} = 4$,
6. $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{2}$.

Exercice 2

1. Étudier la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$,
2. Trouver la plus grande valeur de $\sqrt[n]{n}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3. En déduire que quels soient m et n appartenant à $\mathbb{N}^*$, l'un des nombres $\sqrt[n]{m}$, $\sqrt[m]{n}$ est inférieur ou égal à $\sqrt[3]{3}$.
4. Trouver tous les couples d'entiers naturels distincts non nuls tels que $n^m = m^n$.

Exercice 3

On considère dans le plan $\mathbb{R}^2$ la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2$ $(x \in \mathbb{R})$.

1. Montrer qu'une droite D non verticale intersecte $\mathcal{P}$ en un et un seul point si et seulement si il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que D soit la tangente à $\mathcal{P}$ en (a, a^2).
2. Déterminer les points du plan par lesquels passent respectivement 0, 1 et 2 tangentes à $\mathcal{P}$.