

Fiche 10 : TD du 25-09.

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= 4, \\ u_1 &= 11, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} &= 3u_{n+1} + 4u_n. \end{cases}$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = (-1)^n + 3 \times 4^n.$$

Exercice 2

On pose si x est réel : $P(x) = x^3 - 3x + 1$ et on considère l'équation d'inconnue x réel :

$$(E) : P(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$$

1. Montrer par une étude de fonction que (E) admet 3 solutions et 3 seulement qui seront notées $x_1 < x_2 < x_3$.
2. Montrer la relation : si $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\sin(3\theta) = 3\sin(\theta) - 4\sin^3(\theta)$$

3. Calculer pour $\theta \in \mathbb{R}$: $P(2\sin(\theta))$.
4. En déduire des expressions de x_1 , x_2 et x_3 sous forme trigonométrique.

Exercice 3

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de nombres complexes. On définit deux suites $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant :

$$A_n = \sum_{k=0}^n a_k, \quad b_n = B_{n+1} - B_n.$$

1. Démontrer que si n est entier alors :

$$\sum_{k=0}^n a_k B_k = A_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_k.$$

2. En déduire, si n est entier, sous la forme la plus simple possible, la valeur de $\sum_{k=0}^n 2^k k$.

Exercice 4

Soit n un entier ≥ 2 et $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ les n racines n -ièmes de 1 :

1. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_k = 0$$

2. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = 0$$

3. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{1}{\tan(\pi/2n)}$$