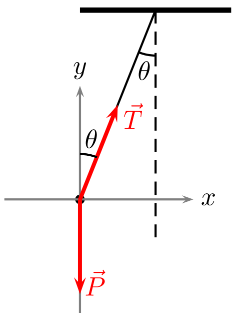
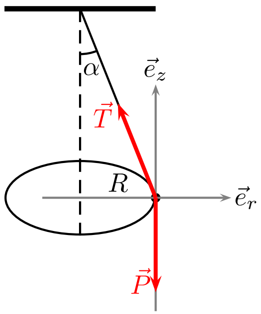
## Exercice 1. Pendule dans un train

On se place dans un repère cartésien où $\vec{e}_y$ est la verticale ascendante et $\vec{e}_x$ l'horizontale dirigée vers l'avant du train.




1. Les forces ont les expressions suivantes : $\boxed{\vec{P} = -mg\vec{e}_y}$ ; $\boxed{\vec{T} = T\sin(\theta)\vec{e}_x - T\cos(\theta)\vec{e}_y}$.
2. L'accélération du point matériel est celle du train, car il y est immobile : $\boxed{\vec{a} = a\vec{e}_x}$.
3. Le PFD appliqué au point matériel dans le référentiel terrestre s'écrit $\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$ ce qui en projetant sur les directions $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$ donne respectivement $T\sin(\theta) = ma$ et $T\cos(\theta) = mg$. On en déduit $\boxed{\theta = \arctan(a/g)} = \underline{17°}$.

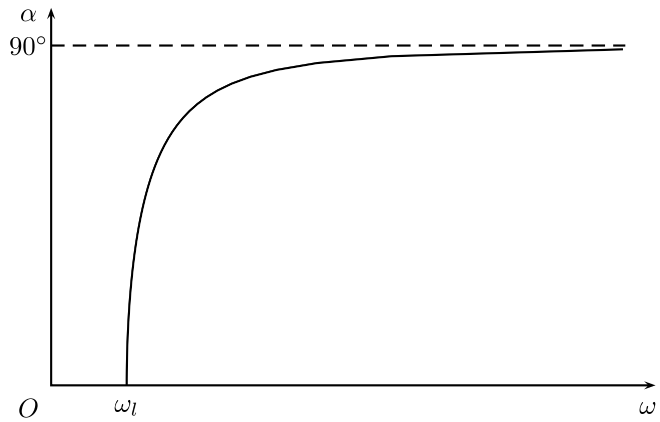
## Exercice 2. Pendule conique



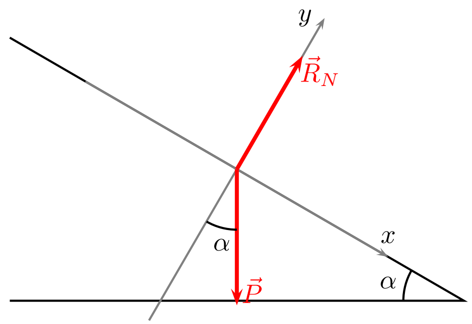

1. Le mouvement du point matériel est circulaire de rayon $R = L\sin(\alpha)$ constant. Dans la base cylindrique, son accélération a pour expression $\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r + R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$. Les forces ont pour expression $\vec{P} = -mg\vec{e}_z$ et $\vec{T} = -T\sin(\alpha)\vec{e}_r + T\cos(\alpha)\vec{e}_z$.

   En projetant le PFD, $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$, sur les 3 axes $(\vec{e}_z, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ il vient $-mg + T\cos(\alpha) = 0$ ; $-mR\dot{\theta}^2 = -T\sin(\alpha)$ et $mR\ddot{\theta} = 0$.

   Par conséquent, la vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$ est constante, $T = mg/\cos(\alpha)$ et $mR\dot{\theta}^2 = mg\tan(\alpha)$ d'où on tire la valeur de la vitesse angulaire : $\boxed{\omega = \sqrt{(g/R)\tan(\alpha)} = \sqrt{g/(L\cos(\alpha))}}$.
2. Puisque $\cos(\alpha) \leqslant 1$, $\omega \leqslant \sqrt{g/L}$. La valeur limite de la vitesse angulaire est donc $\underline{\omega_l = 6{,}26\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}}$ ce qui fait un tour par seconde.
3. $\alpha = \arccos(g/(L\omega^2)) = \arccos((\omega_l/\omega)^2)$.




## Exercice 3. Skieur




1. On choisit un repère cartésien avec $\vec{e}_x$ le long de la pente orienté vers le bas, $\vec{e}_y$ selon la normale ascendante. Le mouvement a lieu selon $\vec{e}_x$ donc $\vec{a} = a_x\vec{e}_x$.

   Les forces exercées sur le skieur sont : le poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\sin(\alpha)\vec{e}_x - mg\cos(\alpha)\vec{e}_y$ et la réaction normale du support $\vec{R}_N = R_N\vec{e}_y$.

   Le PFD appliqué au skieur assimilé à un point matériel, dans le référentiel terrestre supposé galiléen, s'écrit : $\vec{P} + \vec{R}_N = m\vec{a}$.

En projetant sur $\vec{e}_y$, on obtient la relation $-mg\cos(\alpha) + R_N = 0$ d'où $R_N = mg\cos(\theta)$.

En projetant sur $\vec{e}_x$, on obtient $mg\sin(\alpha) = ma_x$ donc l'accélération vaut $\boxed{a_x = \ddot{x} = g(\sin(\alpha)} = \underline{4{,}9\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}}$.

2. $\boxed{v_x(t) = \dot{x} = a_x t}$ et $\boxed{x(t) = \frac{1}{2}a_x t^2}$ en prenant l'origine du repère en haut de la pente.
3. L'instant $t_f$ auquel le skieur atteint le bas de la piste est tel que $L = \frac{1}{2}a_x t_f^2$ donc $t_f = \sqrt{2L/a_x}$. La vitesse atteinte à ce moment-là vaut $\boxed{v_f = v_x(t_f) = \sqrt{2La_x}} = \underline{70\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}$ soit $252\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ ce qui est impossible en pratique sur une piste aussi peu inclinée.
4. Les forces de frottement fluide deviennent importantes à grande vitesse et conduisent à une vitesse limite pour le skieur.
5. En ajoutant cette force $\vec{F} = -\beta v_x^2 \vec{e}_x$, le PFD projeté sur $\vec{e}_x$ devient $mg\sin(\alpha) - \beta v_x^2 = ma_x$.

   La vitesse limite atteinte est telle que $a_x = 0$ : c'est $\boxed{v_{\lim} = \sqrt{\frac{mg}{\beta}\sin(\alpha)}} = \underline{44\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}$ soit $159\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ ce qui est bien plus réaliste.

## Exercice 4. Viscosimètre à chute de billes

1. D'après l'expression de la force de frottement, la dimension de la viscosité vérifie : $\dim(\eta) = \frac{\dim(F)}{\dim(R)\times\dim(v)} = \frac{\dim(F)}{\mathsf{L}^2\cdot\mathsf{T}^{-1}} = \frac{\dim(F)}{\mathsf{L}^2}\times\mathsf{T}$.

   Le premier terme du produit correspond à la dimension d'une pression. Donc la viscosité est une pression que multiplie un temps, qui s'exprime effectivement en $\mathrm{Pa\cdot s}$.
2. On se place dans le référentiel terrestre lié à glycérine, supposé galiléen, muni d'un repère cartésien où $\vec{e}_z$ est selon la verticale descendante. Le système $\{\text{bille}\}$ a pour masse $m = \rho_a V = \rho_a \frac{4}{3}\pi R^3$. Il est soumis aux forces suivantes :

   — son poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\,\vec{e}_z$ ;

   — la poussée d'Archimède $\vec{\Pi} = -\rho_g V\vec{g} = -\rho_g Vg\,\vec{e}_z$ ;

   — la force de frottement fluide $\vec{F} = -6\pi\eta R\vec{v} = -6\pi\eta R v_z\,\vec{e}_z$.

   D'après la deuxième loi de Newton, $\vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{F} = m\,\vec{a}$ où l'accélération de la bille s'écrit $\vec{a} = a_z\,\vec{e}_z = \dot{v}_z\,\vec{e}_z$.

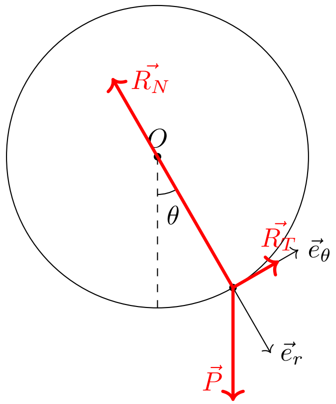
   En projetant sur $\vec{e}_z$, il vient donc : $mg - \rho_g Vg - 6\pi\eta R v_z = m\,\dot{v}_z$. On regroupe les termes et on utilise les expressions de $V$ et de $m$ pour obtenir l'équation différentielle :

$$\boxed{\dot{v}_z + \frac{9\eta}{2\rho_a R^2}\,v_z = g\left(1 - \frac{\rho_g}{\rho_a}\right)}$$

3. C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre, de constante de temps $\boxed{\tau = \frac{2\rho_a R^2}{9\eta}}$.

   La vitesse limite est obtenue est posant $\dot{v}_z = 0$ : $\boxed{v_{\lim} = g\frac{2\rho_a R^2}{9\eta}\left(1 - \frac{\rho_g}{\rho_a}\right)}$.
4. La vitesse limite vaut $v_{\lim} = \frac{d}{\Delta t} = 0{,}244\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. On en déduit la valeur de la viscosité : $\boxed{\eta = \frac{2\rho_a g R^2}{9 v_{\lim}}\left(1 - \frac{\rho_g}{\rho_a}\right) = 1{,}49\,\mathrm{Pa\cdot s}}$.
5. $\underline{\tau = 29{,}1\,\mathrm{ms}}$. Cette durée est très brève relativement au mouvement complet. La vitesse limite peut être considée comme atteinte dès que la bille est immergée.
6. Pour l'eau $\tau \approx 43\,\mathrm{s}$. La vitesse limite n'est certainement pas atteinte dans la chute dans le tube, ce qui rend la mesure inexploitable.

## Exercice 5. Sèche-linge




1. La chaussette étant collée au tambour, elle a un mouvement circulaire de vitesse angulaire constante $\omega = 50 \times 2\pi\,\mathrm{rad}/60\,\mathrm{s} = 5{,}2\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$.

   On a alors, en coordonnées cylindriques d'axe celui du tambour, $\boxed{\vec{v} = R\omega\vec{e}_\theta}$ et $\boxed{\vec{a} = -R\omega^2\vec{e}_r}$.

2. On choisit $\theta$ relativement à la verticale descendante. La chaussette est soumise à son poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\cos(\theta)\vec{e}_r - mg\sin(\theta)\vec{e}_\theta$, à la réaction normale du tambour $\vec{R}_N = -R_N\vec{e}_r$ et à la réaction tangentielle $\vec{R}_T = R_T\vec{e}_\theta$.
   D'après le PFD $\vec{P} + \vec{R}_N = m\vec{a}$.
   En projetant sur $\vec{e}_r$, $mg\cos(\theta) - R_N = -mR\omega^2$.
   En projetant sur $\vec{e}_\theta$, $-mg\sin(\theta) + R_T = 0$.
   Ainsi $\boxed{R_N = m(g\cos(\theta) + R\omega^2)}$ et $\boxed{R_T = mg\sin(\theta)}$.
3. $R_N = 0$ pour $\boxed{\theta = \arccos(-R\omega^2/g)} = \underline{147°}$.
4. Lorsque la réaction normale s'annule, le contact est rompu. La chaussette a alors un mouvement de chute libre à l'intérieur du tambour jusqu'à retomber sur le tambour et se retrouver entraînée dans la rotation.

## Exercice 6. Plongeon

1. D'après le cours, on a $\boxed{x(t) = v_0\cos(\alpha)t}$ et $\boxed{z(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0\sin(\alpha)t}$.
2. Il rentre dans l'eau lorsque $z = -h$ soit à l'instant $t_e$ tel que $-\frac{g}{2}t_e^2 + v_0\sin(\alpha)t_e + h = 0$.
   $t_e$ est la racine positive : $t_e = \dfrac{v_0\sin(\alpha) + \sqrt{v_0^2\sin^2(\alpha) + 2gh}}{g} = 1{,}03\,\mathrm{s}$.
   Les coordonnées du vecteur vitesse sont alors : $v_{ex} = v_x(t_e) = v_0\cos(\alpha) = \underline{3{,}54\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}$
   et $v_{ez} = -gt_e + v_0\sin(\alpha) = -\sqrt{v_0^2\sin^2(\alpha) + 2gh} = \underline{-5{,}84\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}$.
3. La poussée d'Archimède a pour expression : $\vec{\Pi} = -\rho_{\text{eau}}V\vec{g}$. La densité étant définie comme le rapport des masse volumique du corps considéré et de l'eau, la masse du plongeur vaut $m = \rho V = d_h\rho_{\text{eau}}V$ d'où $\rho_{\text{eau}}V = \dfrac{m}{d_h}$. Ainsi $\vec{\Pi} = -\dfrac{m}{d_h}\vec{g}$.
   D'après le PFD $\vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{F} = m\vec{a}$ soit $\boxed{m(1 - 1/d_h)\vec{g} - k\vec{v} = m\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}}$. C'est une équation différentielle du premier ordre pour $\vec{v}(t)$.
4. La solution de l'équation homogène est $\vec{v}_h(t) = \vec{A}\exp(-t/\tau)$ avec $\tau = \dfrac{m}{k} = \underline{0{,}28\,\mathrm{s}}$ et $\vec{A}$ un vecteur quelconque.
   Une solution particulière est le vecteur constant $\vec{v}_P = \dfrac{m}{k}(1 - 1/d_h)\vec{g} = 0{,}31\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\vec{u}_z$.
   Donc la solution générale est : $\vec{v} = \vec{v}_h + \vec{v}_P$.
   La condition initiale (on prend $t = t_e$ comme nouvelle origine des dates) est : $\vec{v}(0) = v_e$ ce qui donne $\vec{v}_P + \vec{A} = \vec{v}_e$. On en déduit $\vec{A} = \vec{v}_e - \vec{v}_P$.
   La solution est donc $\boxed{\vec{v}(t) = \vec{v}_P + (\vec{v}_e - \vec{v}_P)\exp(-t/\tau)}$.
5. La composante verticale de la vitesse est $v_z(t) = v_{Pz} + (v_{ez} - v_{Pz})\exp(-t/\tau)$ que l'on intègre pour obtenir $\boxed{z(t) = v_{Pz}t - \tau(v_{ez} - v_{Pz})(\exp(-t/\tau) - 1)}$ (avec la condition initiale $z(0) = 0$).
   La profondeur est alors $p = -z = -v_{Pz}t + \tau(v_{Pz} - v_{ez})(1 - \exp(-t/\tau))$.
6. Le plongeur commence à remonter lorsque $v_z = 0$ donc à l'instant $t_r$ tel que $v_{Pz} + (v_{ez} - v_{Pz})\exp(-t_r/\tau) = 0$.
   Il vient $t_r = -\tau\ln\left(\dfrac{v_{Pz}}{v_{Pz} - v_{ez}}\right) = \underline{0{,}84\,\mathrm{s}}$.
   La prodondeur atteinte vaut $p(t_r) = -v_{ez}\tau - v_{Pz}t_r = \underline{1{,}4\,\mathrm{m}}$.
   C'est du bon ordre de grandeur, même si cela semble un peu faible. La constante $k$ est peut-être surevaluée.