Chapitre P3

Oscillateurs Mécaniques

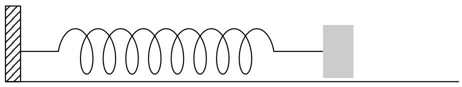
Notions et contenus	Capacités exigibles
Oscillateur harmonique. Exemple de l'oscillateur mécanique.	Établir et reconnaître l'équation différentielle qui caractérise un oscillateur harmonique ; la résoudre compte tenu des conditions initiales. Caractériser l'évolution en utilisant les notions d'amplitude, de phase, de période, de fréquence, de pulsation.
Tension d'un fil. Pendule simple.	Établir l'équation du mouvement du pendule simple. Justifier l'analogie avec l'oscillateur harmonique dans le cadre de l'approximation linéaire.

Questions de cours

- ➢ Écrire l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique sous forme canonique ; indiquer la forme des solutions.
- ➢ Caractériser l'évolution temporelle d'un oscillateur harmonique en utilisant les notions d'amplitude, de phase, de période, de fréquence, de pulsation.
- ➢ Établir l'équation différentielle d'un système masse-ressort horizontal. Identifier la pulsation propre.
- ➢ Établir l'équation différentielle du mouvement d'un pendule simple. Décrire les solutions dans le cas de petites oscillations.

Exercice de cours A. Système masse-ressort

Un mobile de masse m est posé sur un rail horizontal sur lequel il peut glisser sans frottement grâce à un système de coussin d'air. Il est attaché à un ressort horizontal, de raideur k et de longueur à vide ℓ_0, dont l'autre extrémité est fixe.



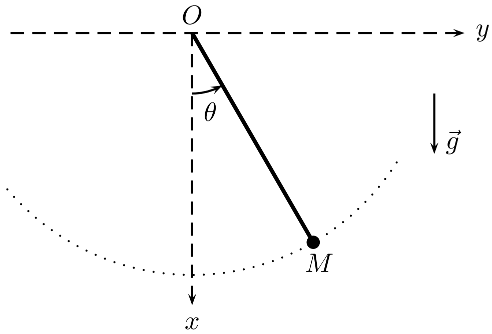
On déplace le mobile d'une longueur a par rapport à sa position d'équilibre, ce qui étire le ressort, et on le lâche sans lui communiquer de vitesse. On note $x = \ell - \ell_0$ l'élongation du ressort.

1. Faire l'inventaire des forces exercées sur le mobile lors de son mouvement.
2. En déduire une équation différentielle vérifiée par $x(t)$.
3. Vérifier que l'expression $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ est solution de l'équation, à condition de donner une valeur bien précise à ω_0. Comment sont fixés A et φ ?
4. Déterminer la valeur de la période d'oscillation.

Exercice de cours B. Pendule simple

Soit un pendule constitué d'un point matériel M de masse m attaché au bout d'un fil sans masse et sans raideur de longueur L. L'autre extrémité est fixée en un point O immobile dans le référentiel terresre supposé galiléen.

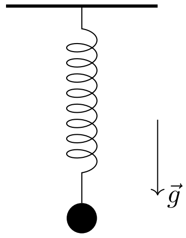
On pose $\vec{u}_x$ le vecteur unitaire vertical descendant et $\vec{u}_y$ le vecteur unitaire horizontal. La position du pendule est repérée par l'angle θ que fait le fil avec la verticale. On le lâche sans vitesse initiale avec un angle initial θ_0.



1. Écrire le PFD dans la base polaire.
2. En déduire l'équation différentielle régissant le mouvement.
3. Multiplier l'équation du mouvement par $\dot{\theta}$ puis intégrer. On obtient une « intégrale première du mouvement ».
4. Dans le cas d'oscillations de faible amplitude, quelle approximation peut-on faire ? En déduire la période des oscillations.
5. Donner la solution de l'équation du mouvement dans cette approximation.

Exercice 1. Système masse-ressort vertical (★)

On suspend une masse m à un ressort dont l'extrémité supérieure est fixe. La longueur à vide du ressort est notée ℓ_0 et sa constante de raideur k.



1. Déterminer la longueur ℓ_{eq} du ressort à l'équilibre.
2. On tire la masse vers le bas d'une distance a depuis sa position d'équilibre et on la lâche sans lui communiquer de vitesse. Écrire une équation différentielle vérifiée par la longueur $\ell(t)$ du ressort. La simplifier en posant $x = \ell - \ell_{eq}$ et identifier une pulsation propre.
3. Résoudre l'équation différentielle avec la condition initiale.

Exercice 2. Association de ressorts (★)

On dispose de deux ressorts identiques de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k.

On les associe soit en parallèle (l'un à côté de l'autre), soit en en série (mis bout à bout). Dans ces deux situations, donner la constante de raideur du ressort équivalent.

Exercice 3. Altitude atteinte par un pendule (★★)

Soit un pendule simple, constitué d'un point matériel M de masse m suspendu au bout d'un fil sans masse et inextensible de longueur L fixé en un point O du référentiel terrestre supposé galiléen. Les frottements sont négligés.

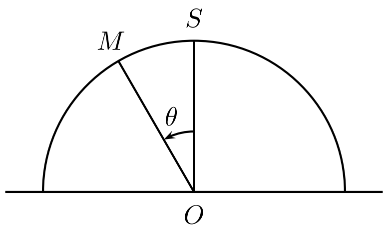
Le pendule étant dans sa position verticale, on lui communique très rapidement une vitesse v_0 perpendiculaire au fil.

On utilise les coordonnées polaires de centre O, où $r = OM$ et θ est l'angle du pendule par rapport à la verticale.

1. Appliquer le principe fondamental de la dynamique au point matériel. Projeter la relation obtenue dans la base polaire.
2. Multiplier l'équation projetée sur $\vec{e}_\theta$ par $\dot{\theta}$, puis intégrer l'équation obtenue entre l'instant initial un instant t. On pensera à bien exprimer la condition initiale.
3. En déduire l'expression de la tension du fil en fonction de θ lors du mouvement.
4. Quel angle atteint le pendule avant de s'arrêter ? Quelle vitesse minimale faut-il appliquer pour lui faire dépasser l'horizontale ?
5. Quelle est alors la tension du fil au point d'arrêt ? Que se passe-t-il en fait ?
6. Est-il possible de faire faire un tour complet au pendule ?

Exercice 4. Toboggan circulaire (★★)

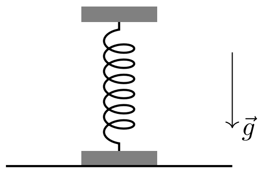
Un enfant M, de masse m, joue sur le toit d'un igloo. Il se laisse glisser depuis le sommet S sans vitesse initiale. On suppose que l'igloo est assimilable à une demi-sphère de rayon a et de centre O. Les frottements sont négligés. On note $\theta = (\widehat{\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OM}})$, comme sur le schéma ci-dessous.



1. Obtenir deux équations décrivant le mouvement de l'enfant M.
2. Il perd le contact avec le igloo lorsque la réaction normale du support s'annule. Déterminer l'angle θ_0 pour lequel l'enfant décolle.
3. Caractériser son mouvement ultérieur.

Exercice 5. Jouet sauteur (★★★)

On étudie un jouet sauteur modélisé par deux masses m identiques reliées par un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k.



Alors qu'il est posé à l'équilibre sur le sol, on le comprime d'une longueur a, et on relâche.

1. En supposant que le jouet reste posé au sol, déterminer l'équation horaire de la longueur du ressort.
2. Écrire la deuxième loi de Newton pour la masse du dessous tant qu'elle reste plaquée au sol.
   En déduire l'évolution temporelle de la réaction du sol sur le jouet.
3. Il y a décollement quand la réaction normale s'annule. À quelle condition sur a cela se produit-il ?

Réponses

Exercice 1 : 1. $\ell_{eq} = \ell_0 + \dfrac{mg}{k}$; 2. $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$; $x(t) = a\cos(\omega_0 t)$.

Exercice 2 : $k_{\parallel} = 2k$; $k_{\text{série}} = k/2$.

Exercice 3 : 2. $L\dot{\theta}^2 = (v_0/L)^2 + 2g(\cos\theta - 1)/L$; 3. $T = mv_0^2/L + mg(3\cos\theta - 2)$; 4. $v_0 > \sqrt{2gL}$; 6. $v_0 > \sqrt{5gL}$.

Exercice 4 : 1. $R_N - mg\cos(\theta) = -ma\dot{\theta}^2$; $mg\sin(\theta) = ma\ddot{\theta}$; 2. $\theta_0 = 48°$; 3. $\vec{v} = \sqrt{2ga/3}\vec{e}_\theta$; 5. $v_f = \sqrt{2ag}$.

Exercice 5 : 1. $\ell(t) = \ell_0 - mg/k - a\cos(\sqrt{(k/m)}\,t)$; 2. $R_N = 2mg + ka\cos(\sqrt{(k/m)}\,t)$; 3. $a > \dfrac{2mg}{k}$.