Chapitre P4

Énergétique du point matériel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Puissance et travail d'une force dans un référentiel	Reconnaître le caractère moteur ou résistant d'une force.
Théorèmes de l'énergie cinétique et de la puissance cinétique dans un référentiel galiléen, dans le cas d'un système modélisé par un point matériel.	Utiliser le théorème approprié en fonction du contexte.
Énergie potentielle. Lien entre un champ de force conservative et l'énergie potentielle. Gradient.	Établir et citer les expressions de l'énergie potentielle de pesanteur (champ uniforme), de l'énergie potentielle gravitationnelle (champ créé par un astre ponctuel), de l'énergie potentielle élastique. Déterminer l'expression d'une force à partir de l'énergie potentielle, l'expression du gradient étant fournie. Déduire qualitativement, en un point du graphe d'une fonction énergie potentielle, le sens et l'intensité de la force associée.
Énergie mécanique. Théorème de l'énergie mécanique. Mouvement conservatif.	Distinguer force conservative et force non conservative. Reconnaître les cas de conservation de l'énergie mécanique. Utiliser les conditions initiales.
Mouvement conservatif à une dimension.	Identifier sur un graphe d'énergie potentielle une barrière et un puits de potentiel. Déduire d'un graphe d'énergie potentielle le comportement qualitatif : trajectoire bornée ou non, mouvement périodique, positions de vitesse nulle.
Positions d'équilibre. Stabilité.	Déduire d'un graphe d'énergie potentielle l'existence de positions d'équilibre. Analyser qualitativement la nature, stable ou instable, de ces positions.
Petits mouvements au voisinage d'une position d'équilibre stable, approximation locale par un puits de potentiel harmonique.	Établir l'équation différentielle du mouvement au voisinage d'une position d'équilibre. *<u>Capacité numérique</u> : à l'aide d'un langage de programmation, résoudre numériquement une équation différentielle du deuxième ordre non-linéaire et faire apparaître l'effet des termes non-linéaires.*

Questions de cours

- ➢ Définir la puissance d'une force, son travail élémentaire et son travail sur un déplacement fini. Que devient ce travail pour une force constante ?
- ➢ Énoncer et démontrer le théorème de la puissance cinétique, en déduire le théorème de l'énergie cinétique.
- ➢ Définir l'énergie potentielle associée à une force conservative.
- ➢ Citer et établir les expressions de l'énergie potentielle de pesanteur (champ uniforme), de l'énergie potentielle gravitationnelle (champ créé par un astre ponctuel), ou de l'énergie potentielle élastique.
- ➢ Définir l'énergie mécanique. Énoncer le théorème de l'énergie mécanique et le démontrer en utilisant le théorème de l'énergie cinétique.
- ➢ Représenter un graphe énergétique standard d'un mouvement conservatif à une dimension, et commenter les différents mouvements observés (trajectoire bornée ou non, mouvement périodique, positions de vitesse nulle, positions d'équilibre stable et instables).

Document 1. Gradient d'un champ scalaire

1.1) Définition

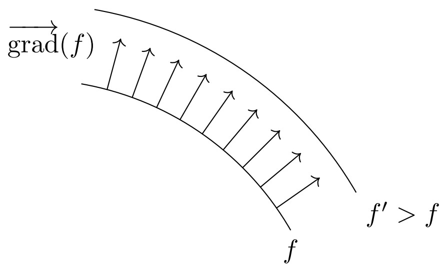
Soit $f(M)$ un champ scalaire, c'est-à-dire une fonction réelle de la position du point M dans l'espace.

Lors d'un déplacement élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$ du point M, la variation élémentaire du champ est la **différentielle** $\mathrm{d}f$. On nomme gradient du champ au point M le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)$ tel que :

$$\boxed{\mathrm{d}f = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell}}$$

1.2) Propriété

Le gradient est dirigé perpendiculairement aux surfaces iso-f (surfaces sur lesquelles la fonction f est constante) et orienté dans le sens des valeurs de f croissantes.



Preuve

> Soit un déplacement élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$ tangent à la surface iso-f à laquelle appartient le point M. Alors $\mathrm{d}f = 0$. On en déduit que $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$. Ceci étant vrai pour tout les déplacements élémentaires tangents, le gradient est dans une direction normale à la surface.
> Soit un déplacement élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$ normal à la surface iso-f. Si $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$ est dans le sens de $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)$ alors $\mathrm{d}f > 0$, et réciproquement. Donc le gradient est dans le sens de l'augmentation de f.

1.3) Expression dans différents systèmes de coordonnées

La différentielle d'une fonction de plusieurs variables s'écrit en fonction des variations élémentaires de chacune des variables : $\mathrm{d}f(\{x_i\}) = \sum_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i$ où $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ est la **dérivée partielle** de f par rapport à x_i, c'est-à-dire la dérivée en considérant que les autres variables sont constantes.

En utilisant l'expression du déplacement élémentaire on en déduit l'expression du gradient.

Coordonnés cartésiennes : $\mathrm{d}f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \dfrac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z$ et $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \mathrm{d}x\,\vec{e}_x + \mathrm{d}y\,\vec{e}_y + \mathrm{d}z\,\vec{e}_z$ donc

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z}$$

Coordonnés cylindriques : $\mathrm{d}f = \dfrac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z + \dfrac{\partial f}{\partial r}\mathrm{d}r + \dfrac{\partial f}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta$ et $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \mathrm{d}z\,\vec{e}_z + \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta$ donc

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z + \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta}$$

Coordonnés sphériques : $\mathrm{d}f = \dfrac{\partial f}{\partial r}\mathrm{d}r + \dfrac{\partial f}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta + \dfrac{\partial f}{\partial \varphi}\mathrm{d}\varphi$ et $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta + r\sin(\theta)\mathrm{d}\varphi\,\vec{e}_\varphi$ donc

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi}$$

Exercice de cours A. Distance de freinage

Une voiture de masse $m = 1{,}2 \times 10^3\,\mathrm{kg}$ roule à la vitesse $v = 50\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ sur une route horizontale. Devant un imprévu, le conducteur écrase la pédale de frein et s'arrête sur une distance $d = 15\,\mathrm{m}$. On modélise la force de freinage par une force constante opposée à la vitesse.

1. Calculer le travail de la force de freinage.
2. En déduire la norme de cette force.
3. Donner l'expression de la distance de freinage en fonction de de la vitesse initiale.

Exercice de cours B. Potentiel de Lennard-Jones

L'interaction entre atomes au sein d'un gaz est modélisée par l'énergie potentielle suivante :

$$\mathcal{E}_p = 4\,E_0 \left(\left(\frac{d}{r}\right)^{12} - \left(\frac{d}{r}\right)^{6} \right)$$

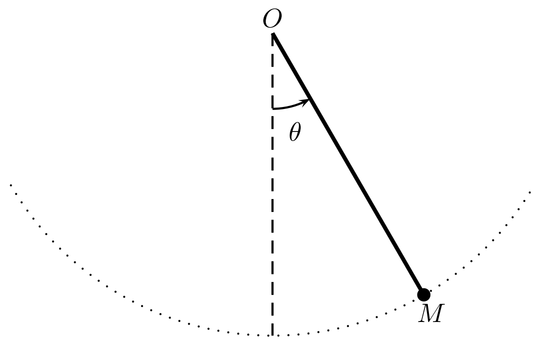
où r est la distance entre les atomes (supposés ponctuels), et E_0 et d des paramètres.

1. Dans un repère centré sur l'un des atomes, exprimer la force d'interaction exercée sur l'autre atome.
2. Pour quelles distances est-elle attractive ? répulsive ?
3. En déduire la position d'équilibre.

Exercice de cours C. Énergie d'un pendule simple

Un pendule simple est constitué d'un point matériel de masse m située à l'extrémité d'un fil tendu de masse nulle, son autre extrémité étant attachée à un point O fixe dans le référentiel terrestre. On néglige les frottements.

La position du pendule est repérée par l'angle θ que fait le fil avec la verticale descendante.



1. Quelles sont les forces exercées sur le point matériel ? Le mouvement est-il conservatif ?
2. Établir l'expression de l'énergie potentielle du point matériel en fonction de θ, en prenant comme référence une valeur nulle au point le plus bas de la trajectoire. Tracer son graphe pour $\theta \in]-\pi, \pi]$.
3. Quelles sont les positions d'équilibre ? Commenter leur stabilité.
4. Pour $\theta \ll 1$, $\cos(\theta) \approx 1 - \theta^2/2$. En déduire l'expression approchée de l'énergie potentielle au voisinage de la position d'équilibre stable.
5. Exprimer l'énergie cinétique du point matériel en fonction de $\dot{\theta}$.
6. Exploiter la conservation de l'énergie pour obtenir une équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$ au voisinage de sa position d'équilibre stable. Commenter.
7. Faire de même au voisinage de la position d'équilibre instable.

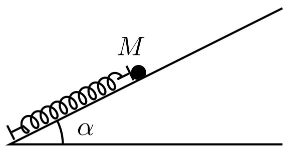
Exercice 1. Luge (★)

Un enfant fait de la luge. On modélise l'ensemble par un point matériel de masse $m = 20\,\mathrm{kg}$. L'enfant part du sommet d'une pente de longueur $d = 100\,\mathrm{m}$ inclinée d'un angle $\alpha = 20°$ par rapport à l'horizontale.

1. Quelle serait la vitesse de l'enfant en bas de la pente en négligeant les frottements ?
2. En réalité, elle vaut $60\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$. En déduire l'intensité, supposée constante, de la force de frottement.

Exercice 2. Ressort de flipper (★★)

On considère un ressort de flipper, de raideur $k = 40\,\mathrm{N \cdot m^{-1}}$ et de longueur à vide $\ell_0 = 10\,\mathrm{cm}$, incliné d'un angle $\alpha = 6°$ avec l'horizontale. Sur ce ressort repose une bille de masse $m = 150\,\mathrm{g}$.



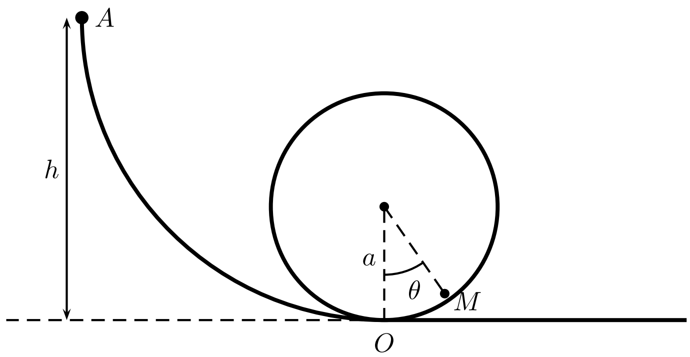
On comprime le ressort au maximum (c'est-à-dire en réduisant à longueur à 0) avant de le lâcher, ce qui propulse la bille. On montre que le contact entre le ressort et la bille est rompu dès que le ressort retrouve sa longueur à vide. On néglige tous les frottements.

La position de la bille est repérée par son abscisse x le long de la pente, avec une origine en sa position initiale.

1. Faire l'inventaire des forces exercées sur la bille. Le mouvement est-il conservatif ?
2. Donner les expressions des énergies potentielles élastiques et de pesanteur en fonction de x.
3. Déterminer la vitesse de la bille au moment au celle-ci quitte le ressort.
4. Déterminer la distance maximale à laquelle pourra s'éloigner la bille.

Exercice 3. Looping (★★)

Une bille, assimilée à un point matériel M de masse m, est lâchée sans vitesse initiale depuis le point A d'une gouttière situé à une hauteur h du point le plus bas O de la gouttière. Cette dernière est terminée en O par un guide circulaire de rayon a, disposé verticalement. On néglige les frottements.



1. Justifier que l'énergie mécanique de la bille se conserve lors du mouvement.
2. En déduire la norme v_0 de la vitesse en O puis en un point M quelconque du cercle repéré par l'angle θ.
3. En appliquant la deuxième loi de Newton, déterminer l'intensité de la réaction normale de la gouttière en fonction de θ.
4. Un contact avec un support cesse lorsque l'intensité de la réaction normale s'annule. Pour quel angle θ_m la bille se détache-t-elle de la gouttière ? Existe-t-il toujours ? En déduire la hauteur minimale de A pour que la bille fasse un looping complet dans le guide circulaire sans perdre contact avec la gouttière.

Exercice 4. Piège à atomes (★★)

On étudie, dans un vide poussé, le mouvement unidimensionnel selon un axe (Ox) d'un atome de lithium, modélisé par un point matériel de masse m. Un faisceau laser focalisé au point O d'abscisse $x = 0$ exerce sur l'atome une force conservative à laquelle on peut associer l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p(x) = -\dfrac{U_0}{1 + x^2/a^2}$, avec U_0 et a des constantes positives. On néglige toutes les autres forces.

1. Tracer l'allure du graphe de $\mathcal{E}_p(x)$. Que représente U_0 ?
2. L'atome est initialement immobile. Où se trouve-t-il ?

On communique à l'atome une vitesse v_0 selon l'axe (Ox).

3. Pour quelle valeur maximale de v_0, notée $v_{\max}$, l'atome demeure-t-il piégé ?
4. Si $v_0 \ll v_{\max}$, déterminer la période des oscillations de l'atome.

Exercice 5. Toboggan (★★)

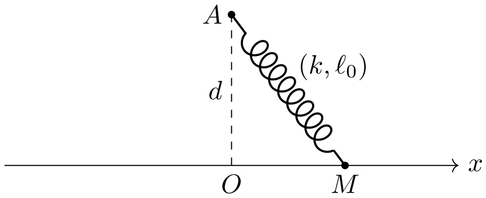
On considère le toboggan hélicoïdal ci-contre qui s'enroule sur $n = 2{,}3$ tours. Son rayon moyen est $R = 2{,}0\,\mathrm{m}$ et la hauteur de l'ensemble est $h = 4{,}0\,\mathrm{m}$. On néglige les frottements.

Pour repérer la position d'un baigneur glissant dans le toboggan, on utilise les coordonnées cylindriques avec un axe vertical (Oz) descendant. On note $\theta > 0$ la position angulaire du baigneur dans le toboggan relativement à la position de départ. Le baigneur suit la trajectoire d'équation $r = R$, $z = \alpha\theta$.

1. Déterminer la valeur de α.
2. Calculer la valeur de la vitesse atteinte en sortie du toboggan, le départ se faisant sans vitesse initiale.
3. À l'aide d'une approche énergétique, montrer que $\ddot{z} = \dfrac{g}{1 + R^2/\alpha^2}$.
4. En déduire la durée de la glissade.

Exercice 6. Bifurcation (★★★)

Un point matériel M de masse m se déplace sans frottement le long d'un axe horizontal Ox (perle enfilée sur Ox). Il est lié par l'intermédiaire d'un ressort sans masse de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k, à un point A situé à la verticale de O à une distance d de l'axe.



1. Déterminer l'énergie potentielle élastique du point matériel, en fonction de x.
2. Déterminer les positions d'équilibre du système. Comment le paramètre d/ℓ_0 influence-t-il le nombre de positions d'équilibre ?
3. Etudier la stabilité des positions d'équilibre.
4. En déduire l'allure du graphe de l'énergie potentielle dans les différents régimes identifiés.
5. Tracer sur un même graphe les positions d'équilibre en fonction de d en précisant leur stabilité. Justifier le nom de bifurcation « fourche » donné à cette situation.

Réponses

Exercice 1 : 1. $v = 93\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$; 2. $f = 39\,\mathrm{N}$.

Exercice 2 : 3. $v_0 = 1{,}57\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$; 4. $x_{\max}1{,}30\,\mathrm{m}$.

Exercice 3 : 2. $v = \sqrt{2g\,(h - a + a\cos(\theta))}$; 3. $R_N = mg(3\cos(\theta) - 2 + 2h/a)$; 4. $\cos(\theta_m) = (2/3)(1 - h/a)$; $h \leqslant 5a/2$.

Exercice 4 : 3. $v_{\max} = \sqrt{2U_0/m}$; 4. $T_0 = 2\pi\sqrt{ma^2/(2U_0)}$.

Exercice 5 : 1. $\alpha = 0{,}28\,\mathrm{m\cdot rad^{-1}}$; 2, $v_f = 8{,}9\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$; 4. $t_f = 6{,}6\,\mathrm{s}$.

Exercice 6 : 2. $x = 0$ (stable) si $\ell_0 \leqslant d$; $x = 0$ (instable) et $x = \pm\sqrt{\ell^2 - d^2}$ (stables) si $\ell_0 > d$.