PROBLÈME I

Force de traînée

Partie A : Analyse dimensionnelle

Quand un objet de taille caractéristique r se déplace dans un fluide avec une vitesse constante $\vec{v}$, le fluide exerce sur l'objet une force $\vec{F}$. On va supposer que cette force dépend de la forme de l'objet, de sa taille, de sa vitesse, de la masse volumique du fluide ρ et de sa viscosité η. On cherche donc $F(r, v, \rho, \eta)$ sous la forme $F = kr^a v^b \rho^c \eta^d$ avec k sans dimension et a, b, c et d des réels.

I.1) La viscosité a pour unité le pascal-seconde ($\mathrm{Pa \cdot s}$). En déduire sa dimension.

I.2) L'analyse dimensionnelle impose des relations entre a, b, c et d. Quelles sont-elles ?

I.3) Exprimer a, b et c en fonction de d. Déduire que l'on a : $F = k\rho r^2 v^2 \left(\frac{\rho r v}{\eta}\right)^{-d}$ avec d quelconque.

I.4) Montrer que la quantité $Re = \dfrac{\rho r v}{\eta}$ est sans dimension (on la nomme *nombre de Reynolds*).

On déduit de l'analyse précédente que la force a pour expression : $F = \rho r^2 v^2 f(Re)$, avec f une certaine fonction inconnue.

Partie B : Application

Pour mettre au point un planeur d'envergure $20\,\mathrm{m}$ supposé voler à $100\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$, des ingénieurs commencent par concevoir une maquette à l'échelle 1/10. Ils placent cette maquette en soufflerie dans un air pressurisé ayant une masse volumique 5 fois plus importante que l'air atmosphérique et de même viscosité.

Remarque : un avion immobile dans de l'air en mouvement à une vitesse v est équivalent à un avion mobile à la même vitesse v dans de l'air immobile (principe de relativité).

I.5) À quelle vitesse l'air utilisé en soufflerie doit-il circuler autour de la maquette afin que le nombre de Reynolds soit identique au planeur ?

I.6) Les ingénieurs mesurent sur leur maquette une force de traînée de $15\,\mathrm{N}$ .Quelle serait la force de la traînée s'exerçant sur le planeur ?

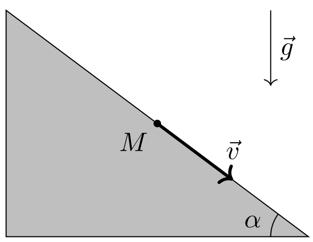
PROBLÈME II

Mouvement d'une luge de compétition

La luge est devenue un sport olympique en 1964 à Innsbruck (Autriche). Le lugeur est allongé, sur le dos et les pieds en avant, sur la luge qui glisse sur une piste de glace. Les spécialistes peuvent atteindre des vitesses supérieures à 100 km/h.

Pour la modélisation, on assimile l'ensemble {luge+lugeur} (désigné par la suite sour le terme simple de luge) à un point matériel M de masse $m = 100\,\mathrm{kg}$. La piste est considérée comme un référentiel galiléen. L'accélération de la pesanteur est prise égale à $g = 9{,}81\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

Partie A. Descente rectiligne



Après la phase de poussée, la luge atteint une vitesse $v_0 = 5{,}0\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Elle descend ensuite une piste rectiligne de pente constante, inclinée de 10 % (on descend verticalement de $10\,\mathrm{m}$ quand on avance horizontalement de $100\,\mathrm{m}$). On appelle α l'angle que fait la piste avec l'horizontale. Les frottements sont négligés devant les autres forces en jeu. Le point M est ainsi en mouvement rectiligne uniformément accéléré.

II.1) Déterminer l'accélération a de la luge en fonction de l'accélération de la pesanteur g et de l'angle α. Application numérique.

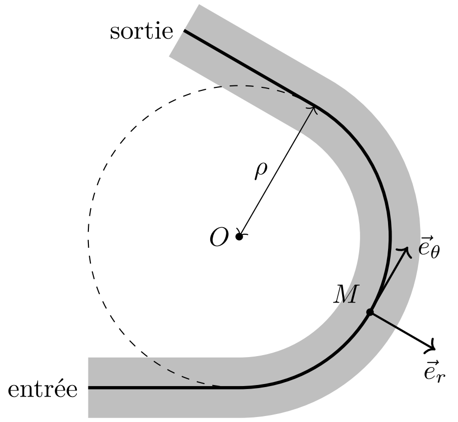
II.2) L'origine des temps est fixée juste après la phase de poussée. Donner l'expression de la vitesse en fonction du temps. Au bout de quelle durée t_a la luge atteint-elle la vitesse $v_a = 30\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$? Application numérique.

II.3) Quelle est la distance parcourue lorsque la luge atteint la vitesse v_a ? Application numérique.

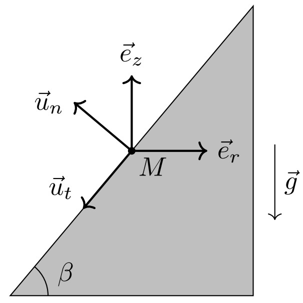
Partie B. Virage circulaire

À présent, le point M est en mouvement circulaire uniforme à la vitesse V, sur un cercle de rayon ρ. La piste est inclinée latéralement d'un angle $\beta \in]0, \pi/2[$ par rapport à l'horizontale.

La trajectoire se situe dans un plan horizontal : $\vec{v} = V\vec{e}_\theta$. Le trièdre de vecteurs unitaires $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ est orthonormé direct. On désigne par $\vec{R} = R_n\vec{u}_n + R_t\vec{u}_t$ la réaction de la piste, qui n'est plus uniquement normale. Les vecteurs unitaires $\vec{u}_n$ (normal) et $\vec{u}_t$ (tangent) sont définis sur la figure de droite ci-dessous.



Vue de dessus de la piste



Vue en coupe de la piste

II.4) Exprimer l'accélération $\vec{a}$ en fonction de V et ρ. Justifier physiquement le sens de l'accélération.

II.5) La luge n'étant soumise qu'à son poids et à la réaction du support, déterminer les expressions des réactions R_n et R_t en fonction de V, ρ, β, g et m.

II.6) En l'absence de frottement, $R_t = 0$. Montrer que cela impose à la vitesse une valeur V_c très précise.

On cherche à prendre le virage avec une vitesse plus grande ; il y a alors risque de dérapage vers l'extérieur du virage. Les lois du frottement solide indiquent que la luge ne dérape pas tant que $|R_t| \leqslant fR_n$ où $f = 0{,}4$ est le coefficient de frottement latéral de la luge sur la piste de glace.

II.7) Montrer que V^2 doit respecter l'inégalité suivante pour éviter le dérapage : $V^2(\cos\beta - f\sin\beta) \leqslant g\rho(\sin\beta + f\cos\beta)$.

II.8) Calculer la vitesse maximale pour un virage de rayon $\rho = 40\,\text{m}$ incliné d'un angle $\beta = 40°$. Commenter.

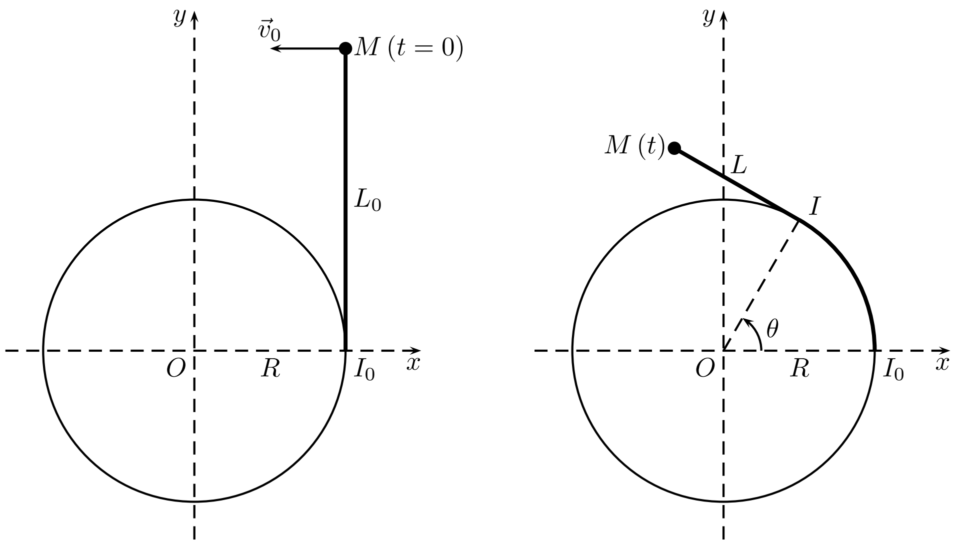
II.9) Montrer que si l'inclinaison β est suffisante, il n'y aura jamais dérapage quelle que soit la vitesse V. Donner l'inclinaison minimale à respecter, qui dépend uniquement du coefficient f. Faire l'application numérique, en degrés.

PROBLÈME III

Fil enroulé sur un cylindre

On munit le référentiel terrestre, supposé galiléen, d'un repère $(O;\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$ où $\vec{e}_z$ est selon la vertical ascendante.

Soit un cylindre de révolution d'axe (Oz) de section circulaire de rayon R. Il est fixé sur un support horizontal confondu avec le plan (Oxy). Un fil de longueur L_0 parfaitement souple, infiniment mince et de masse négligeable, est attaché en I_0 à la base du cylindre. A l'autre extrémité du fil est attaché un objet assimilable à un point matériel M de masse m.



À l'instant initial on communique au point matériel une vitesse $\vec{v}_0$ perpendiculaire au fil (schéma de gauche). Le point matériel évolue sans frottement sur le plan horizontal (Oxy), et le fil reste tendu au cours du mouvement.

À l'instant t, une portion du fil (I_0I) s'est enroulé sur le cylindre (schéma de droite). On repère le point I dans le plan (Oxy) dans un système de coordonnées polaires de centre O, telles que $r = OI$ et $\theta = (\widehat{\overrightarrow{OI_0},\overrightarrow{OI}})$ (orienté positivement dans le sens trigonométrique sur le schéma de droite). On note $(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta)$ la base associée.

III.1) On note $L = IM$ la longueur de fil non enroulé. Le fil étant inextensible, donner la relation entre L, L_0, R et θ.

III.2) Reproduire le schéma, en y faisant apparaître la base $(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta)$ au niveau de I. Exprimer $\overrightarrow{OM}$ dans cette base, en fonction de L_0, R et θ.

III.3) En déduire l'expression de la vitesse $\vec{v}_M$ du point matériel M. Quel angle fait ce vecteur avec le fil ?

III.4) Faire un bilan des forces exercées sur le point matériel M. Montrer que le vecteur accélération est perpendiculaire au vecteur vitesse à tout instant. Que peut-on en déduire pour la valeur de la vitesse ?

III.5) En déduire la relation suivante : $v_0 = (L_0 - R\theta)\,\dot{\theta}$.

III.6) En intégrant cette relation sur le temps, exprimer l'instant t en fonction de θ, L_0, R et v_0. Déterminer l'instant final t_f pour lequel le fil est entièrement enroulé, c'est-à-dire que M touche le cylindre.

III.7) Exprimer l'accélération $\vec{a}_M$ dans la base polaire. Comment la base de Frenet pour M est-elle reliée à la base polaire ? En déduire le rayon de courbure de sa trajectoire. Commenter.

III.8) Tout fil réel se rompt lorsque la tension dépasse un certain seuil. Justifier que dans la situation étudiée le fil se rompt avant son enroulement complet, quel que soit le seuil.

III.9) Décrire qualitativement le mouvement ultérieur (après la rupture du fil). Justifier. À quelle condition sur la tension seuil le point matériel touche-t-il le cylindre ?

PROBLÈME I

Force de traînée

Partie A : Étude théorique

I.1) η est en $\mathrm{Pa \cdot s}$ donc a comme dimension celle d'une pression que multiplie une durée, soit d'une force par unité de surface que multiplie une durée. La dimension d'une force est $\mathsf{M.L.T^{-2}}$ donc la dimension de η est :

$$\dim(\eta) = \frac{\mathsf{M.L.T^{-2}} \times \mathsf{T}}{\mathsf{L}^2} \quad \text{soit } \boxed{\dim(\eta) = \mathsf{M.L^{-1}.T^{-1}}}$$

I.2) On a les dimensions suivantes : $\dim(k) = 1; \dim(r) = \mathsf{L}; \dim(r) = \mathsf{L.T^{-1}}; \dim(\rho) = \mathsf{M.L^{-3}}$. La relation $F = kr^a v^b \rho^c \eta^d$ doit être homogène, soit :

$$\mathsf{M.L.T^{-2}} = \mathsf{L}^a \times \mathsf{L}^b.\mathsf{T}^{-b} \times \mathsf{M}^c.\mathsf{L}^{-3c} \times \mathsf{M}^d.\mathsf{L}^{-d}.\mathsf{T}^{-d}$$

Le produit dimensionnel est unique donc on peut identifier les deux membres de l'équation aux dimensions, ce qui fournit 3 relations entre a, b, c et d :

$$\begin{cases} \text{Homogénéité sur } \mathsf{M} : & 1 = c + d \\ \text{Homogénéité sur } \mathsf{L} : & 1 = a + b - 3c - d \\ \text{Homogénéité sur } \mathsf{T} : & 2 = b + d \end{cases}$$

I.3) On exprime a, b et c en fonction de d :

$$\begin{cases} c & = 1 - d \\ b & = 2 - d \\ a & = 1 - b + 3c + d \quad \Leftrightarrow a = 1 - 2 + d + 3 - 3d + d = 2 - d \end{cases}$$

En réinjectant les coefficients dans la formule $F = kr^a v^b \rho^c \eta^d$, on a :

$$F = kr^{(2-d)} v^{(2-d)} \rho^{(1-d)} \eta^d = k \frac{r^2 v^2 \rho}{r^d v^d \rho^d}$$

On en déduit donc :

$$F = k\rho r^2 v^2 \left(\frac{\eta}{\rho r v}\right)^d = k\rho r^2 v^2 \left(\frac{\rho r v}{\eta}\right)^{-d}$$

I.4) $\dim(\rho r v) = \mathsf{M.L^{-3}} \times \mathsf{L} \times \mathsf{L.T^{-1}} = \mathsf{M.L^{-1}.T^{-1}} = \dim(\eta)$ donc le quotient $Re = \dfrac{\rho r v}{\eta}$ est sans dimension.

Partie B : Application

I.5) En notant avec un indice s les éléments dans la soufflerie à l'échelle $1/10$ et avec un indice a les éléments dans l'air, on a : $\eta_s = \eta_a$, $\rho_s = 5\rho_a$, $r_s = r_a/10$. Afin que $Re_a = Re_s$, il faut :

$$\frac{\rho_s r_s v_s}{\eta_s} = \frac{\rho_a r_a v_a}{\eta_a} \Leftrightarrow \boxed{v_s = \frac{\rho_a r_a}{\rho_s r_s} v_a = 2v_a}$$

Il faut donc que l'air dans la soufflerie soit à $\underline{200\,\mathrm{km/h}}$ pour que l'on ait le même nombre de Reynolds.

I.6) Le rapport des forces de traînée a pour expression :

$$\frac{F_a}{F_s} = \frac{r_a^2 v_a^2 \rho_a f(R_a)}{r_s^2 v_s^2 \rho_s f(R_s)} = \left(\frac{r_a}{r_s}\right)^2 \left(\frac{v_a}{v_s}\right)^2 \left(\frac{\rho_a}{\rho_s}\right)$$

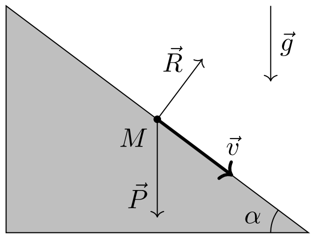
car $f(Re_a) = f(Re_s)$ (les nombres de Reynolds sont identiques).

Numériquement, $\dfrac{F_a}{F_s} = 5$ donc la force de traînée exercée sur le plaeur serait $\boxed{F_a = 5F_s} = \underline{75\,\mathrm{N}}$.

PROBLÈME II

Mouvement d'une luge de compétition

Partie A. Descente rectiligne



II.1) Les forces exercées sur la luge sont le poids (vertical) et la réaction de la piste (normale en l'absence de frottement).

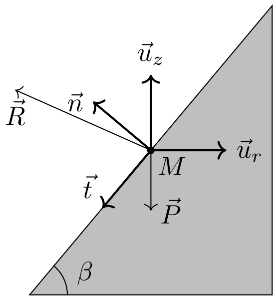
Le PFD s'écrit : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}$. En projetant sur la direction de la pente, on obtient $ma = mg\sin\alpha$.

$\tan\alpha = 10/100$ d'où $\alpha = 5{,}7°$. Il vient $\boxed{a = g\sin\alpha} = \underline{0{,}98\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}}$.

II.2) On intègre : $v = v_0 + at$ donc la vitesse v_a est atteinte à l'instant $\boxed{t_a = \dfrac{v_a - v_0}{g\sin\alpha}} = \underline{25{,}6\,\mathrm{s}}$.

II.3) On intègre à nouveau : $x = v_0 t + at^2/2$ donc $x_a = v_0\dfrac{v_a - v_0}{g\sin\alpha} + \dfrac{(v_a - v_0)^2}{2g\sin\alpha}$ donc $\boxed{x_a = \dfrac{v_a^2 - v_0^2}{2g\sin\alpha}} = \underline{448\,\mathrm{m}}$.

Partie B. Virage circulaire



II.4) Pour un mouvement circulaire uniforme : $\boxed{\vec{a} = -\dfrac{V^2}{\rho}\vec{u}_r}$.

L'accélération est dirigée dans la concavité de la trajectoire et est perpendiculaire au mouvement quand il est uniforme.

II.5) Le PFD s'écrit $\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$ avec le poids $\vec{P} = mg\sin\beta\vec{u}_t - mg\cos\beta\vec{u}_n$ et $\vec{a} = \dfrac{V^2}{\rho}(\cos\beta\vec{u}_t + \sin\beta\vec{u}_n)$.

En projetant sur $\vec{u}_t$ on obtient $mg\sin\beta + R_t = m\dfrac{V^2}{\rho}\cos\beta$ donc $\boxed{R_t = m\dfrac{V^2}{\rho}\cos\beta - mg\sin\beta}$.

En projetant sur $\vec{u}_n$ on obtient $-mg\cos\beta + R_n = m\dfrac{V^2}{\rho}\sin\beta$ donc $\boxed{R_n = m\dfrac{V^2}{\rho}\sin\beta + mg\cos\beta}$.

II.6) $\boxed{V_c = \sqrt{g\rho\tan\beta}}$.

II.7) Si V est plus grand, $R_t > 0$. Il faut alors vérifier $m\dfrac{V^2}{\rho}\cos\beta - mg\sin\beta \leqslant f\left(m\dfrac{V^2}{\rho}\sin\beta + mg\cos\beta\right)$.

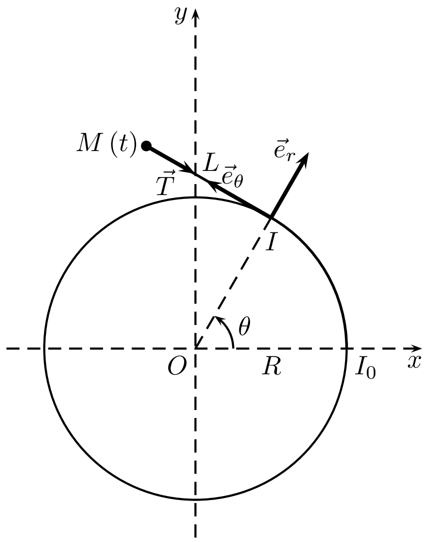
En multipliant par ρ/m et en groupant les termes, il vient effectivement $V^2(\cos\beta - f\sin\beta) \leqslant g\rho(f\cos\beta + \sin\beta)$.

II.8) La vitesse maximale est alors $\boxed{V_{\max} = \sqrt{g\rho\dfrac{f\cos\beta + \sin\beta}{\cos\beta - f\sin\beta}} = 27\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}$ soit $97\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$. C'est insuffisant pour dépasser les $100\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ comme il est annoncé dans l'introduction.

II.9) L'inégalité est assurée quelque soit V si le membre de gauche est négatif c'est-à-dire si $\cos\beta < f\sin\beta$, donc si $\boxed{\beta > \arctan(f^{-1}) = 68°}$.

PROBLÈME III

Fil enroulé sur un cylindre



III.1) $\boxed{L = L_0 - R\theta}$.

III.2) $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM} = R\vec{e}_r + L\vec{e}_\theta$ soit $\boxed{\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r + (L_0 - R\theta)\vec{e}_\theta}$.

III.3) $\vec{v}_M = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}\vec{e}_\theta - (L_0 - R\theta)\dot{\theta}\vec{e}_r$ soit $\boxed{\vec{v}_M = -(L_0 - R\theta)\dot{\theta}\vec{e}_r}$.

III.4) Le point matériel est soumis à son poids, à la réaction normale du support et à la tension $\vec{T}$ du fil. Seule la dernière est dans le plan du mouvement, les autres se compensent. D'après le théorème du centre d'inertie, $\vec{T} = m\vec{a}$ donc le vecteur accélération est dans la direction du fil, c'est-à-dire perpendiculaire au vecteur vitesse. On en déduit que la vitesse reste constante lors du mouvement.

III.5) $L = L_0 - R\theta \geqslant 0$ et $\dot{\theta} \geqslant 0$ donc $\boxed{v_0 = ||\vec{v}_M|| = (L_0 - R\theta)\,\dot{\theta}}$.

III.6) $v_0 t = L_0\theta(t) - R\theta(t)^2/2$ donc $\boxed{t = \dfrac{2L_0\theta(t) - R\theta(t)^2}{2v_0}}$.

Lorsque M touche le cylindre, $L = 0$ soit $\theta = L_0/R$ donc $\boxed{t_f = \dfrac{L_0^2}{2Rv_0}}$.

III.7) Puisque $\vec{v}_M = -v_0\vec{e}_r$ à tout instant, $\vec{a}_M = \dot{\vec{v}}_M = -v_0\dot{\theta}\vec{e}_\theta$. Or $\dot{\theta} = v_0/(L_0 - R\theta)$ donc $\boxed{\vec{a}_M = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}_M}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{v_0^2}{L_0 - R\theta}\vec{e}_\theta}$.

La base de Frenet est $(\vec{u}_T, \vec{u}_N)$. Le vecteur tangent est selon la direction de $\vec{v}_M$ soit $\vec{u}_T = -\vec{e}_r$. La vitesse étant constante, l'accélération est selon $\vec{u}_N$ soit $\vec{u}_N = -\vec{e}_\theta$.

De plus $a_N = \vec{a}_M \cdot \vec{u}_N = -\vec{a}_M \cdot \vec{u}_\theta = \dfrac{v_0^2}{L_0 - R\theta}$.

Or on sait que $a_N = \dfrac{v^2}{R_c}$ avec v la vitesse et R_c le rayon de courbure. $v = v_0$ donc on identifie $\boxed{R_c = L_0 - R\theta = L}$. Ceci signifie que le centre de courbure est situé au point I.

À tout instant le point matériel tourne autour du point de contact du fil avec le cylindre. Ceci est vrai pour tout mouvement de rotation sans glissement d'un système sur un support.

III.8) $\vec{T} = -T\vec{e}_\theta = \vec{a}_M$ donc $\boxed{T = \dfrac{mv_0^2}{L}}$.

La longueur L qui atteint 0 pour un enroulement complet, si bien que la tension diverge et dépasse tout seuil fini. Donc le fil se rompt avant son enroulement complet.

III.9) Si le fil n'exerce plus de tension, la résultante des forces exercées sur le point matériel s'annule ; il poursuit en mouvement rectiligne uniforme. Le fil étant tangent au cylindre, et le vecteur vitesse tangent au fil, la trajectoire passe à une distance L_s du centre, où $L_s = \dfrac{mv_0^2}{T_s}$ est la longueur du fil au moment où la tension du fil atteint sa valeur seuil T_s. L'objet touche le cylindre si $L_s < R$ soit $\boxed{T_s > \dfrac{mv_0^2}{R}}$