Sup MPSI, Lycée Jean Perrin.

DS 1, Durée 2h, Calculatrices interdites.

Exercice 1

Pour tout entier naturel n, on pose

$$S_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + (n-1) \cdot n = \sum_{k=0}^{n} k \cdot (k+1)$$

Démontrer que l'on a

$$S_n = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$$

Exercice 2

On cherche à résoudre l'équation (e) :

$$x^3 - x - \frac{1}{3} = 0$$

d'inconnue x réelle.

1. Montrer par une étude de fonction que (e) a 3 racines réelles $x_1 < x_2 < x_3$ qui sont toutes dans l'intervalle $[-2, 2]$

$$\cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)$$

2. En déduire une expression simple de $P(\frac{2}{\sqrt{3}}\cos(\theta))$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.
3. En déduire les solutions de (e) (on les exprimera à l'aide de la fonction cos).

Exercice 3

On considère la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ pour $n \geq 1$ et $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ ainsi que la suite u_n définie par $u_0 = 0$ et la relation de récurrence : pour $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} = \frac{1}{1 + u_n}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{F_n}{F_{n+1}}$$

2. On pose $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Vérifier que $\alpha^2 = \alpha + 1$ et $\beta^2 = \beta + 1$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^n - \beta^n\right)$$

4. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, une expression de u_n en fonction de α, β et n.
5. Rappeler la formule dite du triangle de Pascal.

6. Montrer que si $n \in \mathbb{N}$:

$$F_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k}$$

On rappelle que pour $k > n$ entiers, on considère : $\binom{n}{k} = 0$

Exercice 4

Pour tout entier naturel n non nul et tout réel $t \in [0, \pi]$, on pose

$$D_n(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kt)$$

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul et tout réel $t \in [0, \pi]$:

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} \exp(ikt)$$

2. En déduire que, si $t \in]0, \pi]$

$$D_n(t) = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}$$

3. Calculer la valeur de $D_n(0)$.
4. Déduire des calculs précédents : $\lim_{t\to 0} \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}$

Exercice 5

On se propose de déterminer toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$ qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) + f(f(n)) = 2n. \tag{1}$$

1. Soit dans cette question $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. On suppose que f vérifie la relation (1).
   (a) Montrer que $f(0) = 0$.
   (b) Soient $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $f(p) = f(q)$. Démontrer que $p = q$.
   (c) On suppose qu'il existe un entier naturel n tel que $\forall k \in [\![0, n]\!],\ f(k) = k$. Démontrer que $f(n+1) = n + 1$.
2. Déterminer toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$ qui vérifient la relation (1).