

DS 1, Correction rapide.

Exercice 1

Pour tout entier naturel n , on pose

$$S_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + (n-1) \cdot n = \sum_{k=0}^n k \cdot (k+1)$$

On a

$$S_n = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

On peut faire une récurrence ou remarquer que

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

Exercice 2

On pose, pour $x \in \mathbb{R}$: $P(x) = x^3 - x + \frac{1}{3}$ et on cherche à résoudre l'équation (e) d'inconnue x réelle :

$$x^3 - x - \frac{1}{3} = 0$$

1. Une étude de fonction une fois remarqué que $f'(x) = 3(x^2 - 1/3)$ montre en effet que (e) a 3 racines réelles $x_1 < x_2 < x_3$. Elles sont toutes dans l'intervalle $[-2, 2]$ car $f(-2) < 0$ et $f(2) > 0$.
2. Si θ est réel alors :

$$\cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)$$

Fait en classe

3. Pour $\theta \in \mathbb{R}$,

$$P\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\cos(\theta)\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}\cos(3\theta) - \frac{1}{3}$$

4. Avec les méthodes vues en classe :

$$x_3 = \frac{2}{3\sqrt{3}}\cos(\pi/18) \quad x_2 = \frac{2}{3\sqrt{3}}\cos(11\pi/18) \quad x_1 = \frac{2}{3\sqrt{3}}\cos(13\pi/18)$$

Exercice 3

On considère la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ pour $n \geq 1$ et $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ ainsi que la suite u_n définie par $u_0 = 0$ et la relation de récurrence : pour $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} = \frac{1}{1 + u_n}$$

1. Par récurrence (simple) pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{F_n}{F_{n+1}}$$

2. On pose $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$. On a $\alpha^2 = \alpha + 1$ et $\beta^2 = \beta + 1$.

3. Par récurrence avec prédécesseur, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^n - \beta^n)$$

4. Cours.

5. Par récurrence avec prédécesseur : si $n \in \mathbb{N}$:

$$F_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n-k}{k}$$

En effet, l'initialisation ne pose pas de problème et on peut remarquer avec le triangle de Pascal que :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n-k}{k} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1-k}{k} &= \\ \sum_{k=0}^{n+2} \left(\binom{n-k}{k} + \binom{n+1-k}{k} \right) &= \\ \sum_{k=0}^{n+2} \binom{n+2-k}{k} \end{aligned}$$

Exercice 4

Pour tout entier naturel n non nul et tout réel $t \in [0, \pi]$, on pose

$$D_n(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(kt)$$

1. Par la formule d'Euler, pour tout entier naturel n non nul et tout réel $t \in [0, \pi]$:

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^n \exp(ikt)$$

2. Par la série géométrique, si $t \in]0, \pi]$

$$D_n(t) = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}$$

3. $D_n(0) = 2n + 1$.

4. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)} = 2n + 1$

Exercice 5

On se propose de déterminer toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$ qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n) + f(f(n)) = 2n. \quad (1)$$

1. Soit dans cette question $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. On suppose que f vérifie la relation (1).

(a) $0 = f(0) + f(f(0)) \geq f(0)$ donc $f(0) = 0$.

(b) Soient $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $f(p) = f(q)$.

On a alors $f(p) + f(f(p)) = f(p) + f(f(q)) = 2p = 2q$.

Ainsi $p = q$.

(c) On suppose qu'il existe un entier naturel n tel que $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, f(k) = k$.

Dans ce cas $f(n+1) \geq n+1$ avec les questions précédentes et de même $f(f(n+1)) \geq n+1$.

Or : $f(n+1) + f(f(n+1)) = 2(n+1)$. Ainsi : $f(n+1) = n+1$.

2. Par récurrence forte, la seule fonction vérifiant la relation (1) est l'identité.