

Fiche 11 : Fonctions élémentaires.

Exercice 1

Montrer que l'application suivante est une bijection :

$$\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{U} - \{-1\} \\ \alpha \rightarrow \frac{1+i\alpha}{1-i\alpha} \end{cases}$$

Exercice 2

Montrer que l'application f suivante est une bijection dont on explicitera la réciproque :

$$f \begin{cases} \mathbb{C} - \{1\} \rightarrow \mathbb{C} - \{-1\} \\ z \rightarrow \frac{1+z}{1-z} \end{cases}$$

Exercice 3

Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$

1. Étudier la fonction f .
2. Montrer que f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur un intervalle qu'on précisera.
3. Expliciter la réciproque g de f .

Exercice 4

Déterminer la dérivée et faire une étude de la fonction définie sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ par $f(x) = \sqrt{\cos(x)}$.

Exercice 5

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 \quad \text{et} \quad x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$$

Exercice 6

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$$

1. Déterminer son domaine de définition D_f .
2. Étudier sa parité.
3. Déterminer f' et étudier la fonction f .
4. Montrer que pour tout x réel : $\sinh(f(x)) = x$ et $f(\sinh(x)) = x$.

Exercice 7

Soit g la fonction définie pour $x \geq 1$ par :

$$g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

1. Déterminer g' (là où f est dérivable!) et étudier la fonction g .
2. Montrer que pour tout $x > 1$: $\cosh(g(x)) = x$.
3. Que pensez de la formule : pour tout x réel : $g(\cosh(x)) = x$?