

## Fiche 12 : TD du 3-10.

### Exercice 1

Calculer sous la forme la plus simple possible pour  $(n, a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}^2$  :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cosh(a + bk), \quad \sum_{k=0}^{n-1} \sinh(a + bk).$$

### Exercice 2

1. Montrer que pour tout réel  $x$  non nul, on a :

$$\tanh(x) = \frac{2}{\tanh(2x)} - \frac{1}{\tanh x}$$

2. En déduire la valeur de

$$u_n = 2^0 \tanh(2^0 x) + 2^1 \tanh(2^1 x) + \dots + 2^n \tanh(2^n x)$$

pour  $n$  entier naturel non nul et  $x$  réel non nul donnés puis calculer la limite de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

### Exercice 3

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0; \frac{\pi}{2}[$  par :

$$f(x) = 2 \sin(x) + \tan(x) - 3x$$

Étudier la fonction  $f$  et montrer que, pour tout  $x \in [0; \frac{\pi}{2}[$  :

$$2 \sin(x) + \tan(x) \geq 3x$$

### Exercice 4

Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right)$$

1. Étudier sur  $\mathbb{R}$  le signe de l'expression  $\frac{1+x}{1-x}$
2. En déduire le domaine de définition  $D_f$  de  $f$ .
3. Étudier la parité de  $f$  sur  $D_f$ .
4. Déterminer  $f'(x)$  pour  $x \in D_f$ .
5. Justifier que  $f$  est une bijection entre des ensembles à préciser (*On formulera la réponse à cette question sous la forme : la fonction  $f$  est une bijection de l'ensemble ... sur l'ensemble ...*)
6. Montrer que pour tout  $x$  de  $D_f$  :  $\tanh(f(x)) = x$
7. Montrer que pour  $x$  dans un ensemble qu'on déterminera :  $f(\tanh(x)) = x$ .

### Exercice 5

Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $f(x) = \exp(x/e)$  et on considère par ailleurs l'équation d'inconnue  $x$  réelle :

$$(E) \quad \exp(\exp(x/e)/e) = x$$

1. Étudier les variations de la fonction  $f$ .
2. Soit  $x \in \mathbb{R}$ , montrer que si  $f(x) = x$  alors  $x$  est solution de (E).
3. Montrer réciproquement que si  $x$  est solution de (E) alors  $f(x) = x$  (*on pourra procéder par l'absurde ou par contraposée*).
4. Étudier sur  $\mathbb{R}$  la fonction définie par  $g(x) = f(x) - x$ .
5. Résoudre l'équation (E).