Exercice 1. Système masse-ressort vertical

1. On étudie le système {masse} dans le référentiel terrestre muni d'un repère cartésien où $\vec{e}_z$ représente la verticale descendante. Les forces exercées sont :
   — le poids $\vec{P} = m\,\vec{g} = mg\,\vec{e}_z$;
   — la force de rappel du ressort : $\vec{F} = -k(\ell - \ell_0)\,\vec{e}_z$.

   À l'équilibre les forces se compensent soit $\vec{P} + \vec{F} = \vec{0}$. En projetant sur $\vec{e}_z$, il vient $mg - k(\ell_{eq} - \ell_0) = 0$ soit $\boxed{\ell_{eq} = \ell_0 + \dfrac{mg}{k}}$.

2. Hors de l'équilibre, on applique la deuxième loi de Newton : $\vec{P} + \vec{F} = m\,\vec{a}_G$ où l'accélération du centre d'inertie G de la masse est $\vec{a}_G = \ddot{z}_G\,\vec{e}_z = \ddot{\ell}\,\vec{e}_z$. En effet la position du centre d'inertie est égal à une constante près à la longueur du ressort.
   En projetant sur $\vec{e}_z$, il vient $mg - k(\ell - \ell_0) = m\ddot{\ell}$. On pose $x = \ell - \ell_{eq} = \ell - \ell_0 - \dfrac{mg}{k}$.
   Alors $\ddot{x} = \ddot{\ell}$ et $-kx = -k(\ell - \ell_0) + mg$ qui est le premier membre de l'équation.
   On en déduit $-kx = m\ddot{x}$ soit $\boxed{\ddot{x} + \dfrac{k}{m}x = 0}$.
   C'est l'équation caractéristique d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}}$.

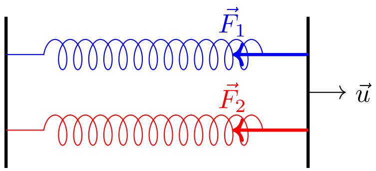
3. Les solutions sont de la forme : $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$.
   Les conditions initiales sont :
   — on étire le ressort d'une longueur a depuis sa longueur d'équilibre soit $x(t = 0) = a$. On en déduit $A = a$;
   — la masse est lâchée sans vitesse initiale d'où $\dot{x}(t = 0) = 0$. Or $\dot{x}(t) = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$. Avec la condition initiale on obtient $B = 0$.

   Pour conclure, l'équation horaire du mouvement est $\boxed{x(t) = a\cos(\omega_0 t)}$.

Exercice 2. Association de ressorts

En parallèle : il est clair que la longueur à vide reste la même : $\ell_{0,\parallel} = \ell_0$.

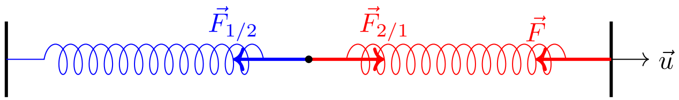
Les deux ressorts ont aussi la même longueur ℓ à tout instant. La force exercée par l'association est la somme des forces exercées par chacun des ressorts (voir schéma) : $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -2k(\ell - \ell_0)\vec{u}$. C'est l'équation de la force d'un ressort unique de raideur équivalente $\boxed{k_{eq,\parallel} = 2k}$: de façon générale, <u>les constantes de raideur s'ajoutent en parallèle</u>.



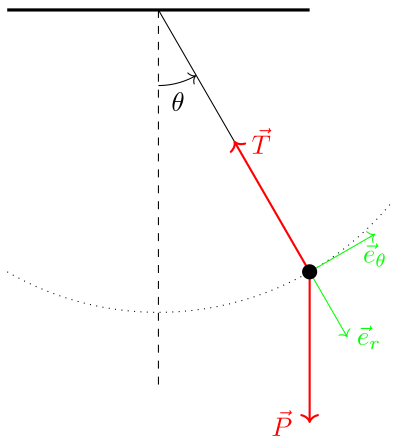
En série : il est clair que la longueur à vide devient la somme des longueurs à vide : $\ell_{0,\text{série}} = 2\ell_0$.

On se place dans la situation où le permier ressort prend la longueur ℓ_1 et le second la longueur ℓ_2 soit une longueur totale $\ell = \ell_1 + \ell_2$ (schéma ci-dessous). La force exercée par le ressort 2 sur le ressort 1 est $\vec{F}_{2/1} = k(\ell_2 - \ell_0)\vec{u}$ et la force exercée par le ressort 1 sur le ressort 2 est $\vec{F}_{1/2} = -k(\ell_1 - \ell_0)\vec{u}$. Elles sont opposées en vertu de la troisième loi de Newton, d'où $k(\ell_2 - \ell_0) = k(\ell_1 - \ell_0)$ soit $\ell_1 = \ell_2$.

La force exercée par l'association de ressorts à son extrémité droite est exercée par le ressort 2 : $\vec{F} = -k(\ell_2 - \ell_0)\vec{u}$. Or $\ell_2 = \ell/2$ et $\ell_0 = \ell_{0,\text{série}}/2$ donc $\vec{F} = -k(\ell - \ell_{0,\text{série}})/2\,\vec{u}$. C'est l'expression de la force exercée par un ressort unique de raideur équivalente $\boxed{k_{eq,\text{série}} = k/2}$. De façon générale, <u>les inverses de constantes de raideur s'ajoutent en série</u>.

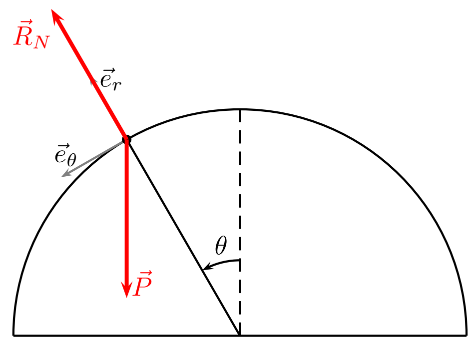


Exercice 3. Altitude atteinte par un pendule



1. On s'intéresse au mouvement de la masse, soumise à son poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg(\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta)$, et à la tension du fil, $\vec{T} = -T\vec{e}_r$.
   Dans les coordonnées polaires définies ci-dessus, l'accélération dans le cas d'un mouvement circulaire où $r = L$ est $\vec{a} = -L\dot{\theta}^2\vec{u}_r + L\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$.
   D'après la deuxième loi de Newton, il vient : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$.
   En projetant sur $\vec{e}_r$ on obtient $\boxed{-mL\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - T}$, et en projetant sur $\vec{e}_\theta$ on obtient $mL\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$ ou $\boxed{\ddot{\theta} + \dfrac{g}{L}\sin\theta = 0}$: c'est l'équation du mouvement.
2. En multipliant l'équation du mouvement par $\dot{\theta}$, on obtient $L\dot{\theta}\ddot{\theta} + g\dot{\theta}\sin\theta = 0$ soit $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{L\dot{\theta}^2}{2} - g\cos\theta\right) = 0$. En intégrant, cela nous donne $L\dfrac{\dot{\theta}^2}{2} - g\cos\theta = \text{cste}$, où la constante est déterminée par les conditions initiales : $\dot{\theta}(0) = v_0/L$ et $\theta(0) = 0$, ce qui donne $\text{cste} = v_0^2/(2L) - g$.
   Ainsi $\boxed{L\dot{\theta}^2 = v_0^2/L + 2g(\cos\theta - 1)}$.
3. En injectant cette expression dans l'équation obtenue en projetant la relation fondamentale de la dynamique sur $\vec{e}_r$, on obtient $\boxed{T = mg\cos\theta + mL\dot{\theta}^2 = mv_0^2/L + mg(3\cos\theta - 2)}$.
4. Le pendule s'arrête avant de rebrousser chemin lorsque $\dot{\theta} = 0$. On en déduit $\boxed{\theta_{\max} = \arccos\left(1 - \dfrac{v_0^2}{2gL}\right)}$.
   Afin que le pendule dépasse l'horizontale, il faut $\theta_{\max} > \pi/2$ soit $\cos\theta_{\max} < 0$ donc $\boxed{v_0 > \sqrt{2gL}}$.
5. $T(\theta_{\max}) = \dfrac{mv_0^2}{L} + mg\left(3 - \dfrac{3v_0^2}{2gL} - 2\right) = mg - \dfrac{mv_0^2}{2L} < 0$ si $v_0 > \sqrt{2gL}$.
   On en déduit que le fil n'est plus tendu. En fait, si le fil dépasse l'horizontale il se détend avant de s'arrêter.
6. Pour faire faire un tour complet, il faut ainsi que le pendule atteigne le haut sans s'arrêter ni se détendre. D'après la question précédente, cette dernière condition est la plus contraignante. Afin que T reste positif jusqu'en haut, soit pour $\theta = \pi$, il faut $mv_0^2/L - 5mg > 0$: $\boxed{v_0 > \sqrt{5g/L}}$.

Exercice 4. Toboggan circulaire



1. On se place en coordonnées polaires. Dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$, le poids s'écrit $\vec{P} = -mg\cos(\theta)\vec{e}_r + mg\sin(\theta)\vec{e}_\theta$ et la réaction normale de l'igloo $\vec{R}_N = R_N\vec{e}_r$.
   L'accélération pour un mouvement circulaire vaut $\vec{a} = -a\dot{\theta}^2\vec{e}_r + a\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$.
   Le PFD appliqué à l'enfant assimilé à un point matériel s'écrit $\vec{P} + \vec{R}_N = m\vec{a}$ soit en projetant sur la base :
   $$\boxed{R_N - mg\cos(\theta) = -ma\dot{\theta}^2} \quad \text{et} \quad \boxed{mg\sin(\theta) = ma\ddot{\theta}}$$
2. En multipliant la deuxième équation par $\dot{\theta}$, on obtient $g\sin(\theta)\dot{\theta} = a\ddot{\theta}\dot{\theta}$.
   On reconnaît dans le membre de gauche la dérivée de $-g\cos(\theta)$ et dans le membre de droite la dérivée de $a\dot{\theta}^2/2$. On en déduit que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(a\dot{\theta}^2/2 + g\cos(\theta)\right) = 0$ s'annule donc que $a\dot{\theta}^2/2 + g\cos(\theta) = \text{cste}$.
   À l'instant initial, $\theta = 0$ et $\dot{\theta} = 0$ donc la constante vaut mg. On en déduit l'expression de la vitesse angulaire à tout instant :
   $$\dot{\theta} = \sqrt{(2g/a)(1 - \cos(\theta))}$$

On peut injecter cette expression dans la première équation obtenue avec le PFD pour exprimer la réaction normale :

$$\boxed{R_N = mg\cos(\theta) - 2mg(1-\cos(\theta)) = mg(3\cos(\theta)-2)}$$

Cette réaction s'annule pour $\cos(\theta_0) = 2/3$ c'est-à-dire pour $\boxed{\theta_0 = \arccos(2/3)} = \underline{48°}$. Le contact cesse pour cet angle.

3. Son mouvement ultérieur est un mouvement de chute libre.

Exercice 5. Jouet sauteur

On se place dans le référentiel terrestre, supposé galiléen, muni du repère cartésien $(O;\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$ où O est au niveau du sol et $\vec{e}_z$ est vertical ascendant.

1. Soit ℓ la longueur du ressort, qui vaut l'altitude z_G de la masse du dessus à une constante près. Cette masse est soumise :
   - à son poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$;
   - à la force de rappel du ressort $\vec{F} = -k(\ell-\ell_0)\vec{e}_z$.

   D'après la deuxième loi de Newton, $\vec{P}+\vec{F} = m\vec{a}_G$ où $\vec{a}_G = \ddot{z}_G\vec{e}_z = \ddot{\ell}\vec{e}_z$.
   En projetant sur $\vec{e}_z$ il vient $-mg - k(\ell-\ell_0) = m\ddot{\ell}$ que l'on met sous forme canonique : $\ddot{\ell} + \frac{k}{m}\ell = \frac{k}{m}\left(\ell_0 - \frac{mg}{k}\right)$.

   C'est un oscillateur harmonique de pulsation propre $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$. Les solutions sont $\ell = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + \ell_{eq}$ où $\boxed{\ell_{eq} = \ell_0 - \frac{mg}{k}}$ est la longueur du ressort à l'équilibre.
   Les conditions initiales sont $\ell(0) = \ell_{eq} - a$ (écrasement d'une longueur a) et $\dot{\ell}(0) = 0$ (relâchement).
   On en déduit $A = -a$ et $B = 0$.
   Pour conclure, $\boxed{\ell(t) = \ell_{eq} - a\cos(\omega_0 t)}$.

2. Considérons le système constitué de la masse du dessous. Il est soumis :
   - à son poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$;
   - à la force de rappel du ressort $\vec{F} = +k(\ell-\ell_0)\vec{e}_z$ (le vecteur unitaire extérieur est vers le bas) ;
   - à la réaction normale du sol $\vec{R} = R_N\vec{e}_z$.

   D'après le PFD : $\vec{P}+\vec{F}+\vec{R} = m\vec{a} = \vec{0}$ tant que le jouet reste posé au sol.
   On projette sur $\vec{e}_z$: $-mg + k(\ell-\ell_0) + R_N = 0$.
   On en déduit la réaction normale : $R_N(t) = mg + k\ell_0 - k\ell(t)$. En remplaçant par l'expression obtenue à la question précédente, il vient : $\boxed{R_N(t) = 2mg + ka\cos(\omega_0 t)}$.
   Remarque : si on ne comprime pas le jouet, on obtient $R_N = 2mg$ ce qui normal, la réaction compense le poids total du jouet.

3. $R_N(0)$ est positif puis décroît. Sa valeur minimale est $R_N(\pi/\omega_0) = 2mg - ka$. Si cette valeur est négative, la réaction normale s'annule avant et le jouet perd le contact avec le sol : il saute.
   Il faut pour ce faire que $\boxed{a > \frac{2mg}{k}}$.