L'objectif est d'intégrer des équations différentielles du premier ordre dans différentes situations physiques à l'aide de la méthode d'Euler.

Notebook

| numéro **bc73-3239753** sur `https://capytale2.ac-paris.fr`

Partie A. Système linéaire du premier ordre

Le but de cette partie de vérifier la pertinence de la méthode d'Euler dans un cas où la solution exacte est connue.

Considérons le cas d'un système physique dont l'évolution d'une grandeur x est donnée par l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{x_e - x}{\tau}$$

où τ est la constante de temps et x_e la valeur de x à l'équilibre. On cherche à résoudre cette équation numériquement sur l'intervalle $[0, 5\tau]$, la valeur initiale de x étant nulle.

C'est le cas par exemple d'une chute sans vitesse initiale avec frottements fluides de type Stokes, ou de la charge d'un condensateur à travers une résistance, ou encore d'une cinétique chimique du premier ordre.

- ❏ Donner la solution exacte de l'équation différentielle.
- ❏ Coder l'algorithme d'Euler, avec $f(x) = \dfrac{x_e - x}{\tau}$
- ❏ Observer le résultat obtenu lorsqu'on augmente progressivement le nombre d'itération. Comment faut-il choisir N ? Penser aux différentes contraintes.

Partie B. Cas non linéaire

L'algorithme peut alors est utilisé pour résoudre numériquement des équations différentielles du premier ordre mais non-linéaires, pour lesquelles on ne connait pas la solution.

Considérons par exemple le cas d'une chute sans vitesse initiale d'un corps de masse m dans le champ de pesanteur g et soumis à une force de frottement fluide de la forme : $F = \alpha v^2$.

La vitesse verticale descendante $v(t)$ est alors solution de l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - \frac{\alpha}{m} v^2$$

Afin de pouvoir mettre en œuvre l'algorithme d'Euler, il faut déterminer l'intervalle de temps sur lequel on veut résoudre l'équation : il faut que la vitesse ait quasiment atteint sa valeur limite v_{lim} à l'instant final choisi. Pour ce faire, on utilise le temps caractéristique d'évolution $\tau = v_{\mathrm{lim}}/a_0$ où a_0 est l'accélération initiale.

- ❏ Déterminer l'expression de la vitesse limite v_{lim}, de a_0 et en déduire l'expression de τ.
- ❏ Adapter l'algorithme d'Euler précédent pour obtenir l'évolution de la vitesse sur l'intervalle $[0, 5\tau]$, la vitesse initiale étant nulle.

Partie C. Équation différentielle du deuxième ordre

Considérons un pendule simple de longueur $L = 1{,}00\,\mathrm{m}$ dans le champ de pesanteur $g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Il est régi par l'équation différentielle suivante portant sur l'angle $\theta(t)$ entre le fil et la verticale :

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{L}\sin(\theta) = 0$$

Initialement, on écarte le pendule d'un angle θ_0 et on le lâche sans vitesse initiale ($\dot{\theta}_0 = 0$).

- ❏ Quelle est la solution dans l'approximation des petites oscillations ? Donner sa période T_0.

On cherche à étudier les solutions de cette équation sans faire l'hypothèse des petits oscillations. On utilise pour ce faire une méthode numérique.

Pour intégrer une équation différentielle du deuxième ordre, on la décompose en deux équations du premier ordre :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} & = \omega \\ \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} & = \dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\dfrac{g}{L}\sin(\theta) \end{cases}$$

Le « vecteur » $x(t) = [\theta(t), \omega(t)]$ vérifie une équation différentielle du premier ordre, que l'on peut résoudre en utilisant l'algorithme d'Euler. Il suffit de considérer deux variables au lieu d'une.

- ❏ Adapter l'algorithme d'Euler pour prendre en compte ces deux variables couplées.
- ❏ Observer le résultat obtenu pour $\theta_0 = 0{,}1$ en le comparant à la solution exacte dans le régime de petites oscillations. L'accord est-il bon ?
- ❏ Vérifier que l'on s'écarte du régime des petites oscillations pour des valeurs plus importantes de θ_0.

Un des effets de la non-linéarité de l'équation différentielle est que la période dépend de l'amplitude des oscillations, donc de θ_0.

- ❏ Par quelle position passe le pendule au quart de sa période ? En déduire une méthode numérique pour déterminer la période. La coder.
- ❏ Tester l'algorithme pour $\theta_0 = 0{,}1$. Obtient-on le résultat escompté ?
- ❏ Écrire un code permettant le calcul automatisé de la période pour 100 valeurs de θ_0 dans l'intervalle $[0{,}1; \pi/2]$. Afficher le graphe.
- ❏ Vérifier graphiquement que le graphe peut être modélisé par la fonction $f(\theta_0) = T_0(1 + \theta_0^2/16)$ (formule de Borda) pour les petites valeurs de θ_0.