[Méthode] Méthode d'Euler

Principe

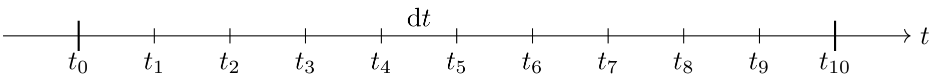
La méthode d'Euler est une méthode numérique élémentaire de résolution d'équations différentielles du premier ordre :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x)$$

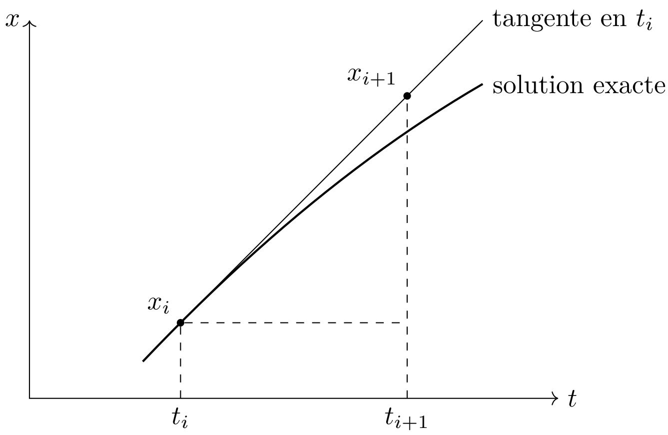
avec une condition initiale donnée (t_0, x_0).
Elle procède en calculant de façon itérative les valeurs approchées x_i de $x(t)$ à des instants t_i régulièrement espacés dans un intervalle $[t_0, t_f]$:

$$t_i = t_0 + i \times \frac{t_f - t_0}{N}$$

On nomme $\boxed{\mathrm{d}t = t_{i+1} - t_i = \frac{t_f - t_0}{N}}$ le **pas** d'itération.



Pour la méthode d'Euler dite *explicite*, une étape d'itération se fait en approximant la courbe solution passant par le point (t_i, x_i) par sa tangente en t_i. Le point x_{i+1} est l'ordonnée de cette tangente en t_{i+1}.



En écrivant le coefficient directeur de la tangente, on a ainsi :

$$\frac{x_{i+1} - x_i}{t_{i+1} - t_i} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t_i) = f(x_i)$$

On en déduit la relation de récurrence pour t_i et x_i :

$$\boxed{\begin{cases} t_{i+1} & = t_i + \mathrm{d}t \\ x_{i+1} & = x_i + \mathrm{d}t \times f(x_i) \end{cases}}$$

L'erreur commise est de l'ordre de $\mathrm{d}t^2$ donc proportionnelle à $1/N^2$. Après N itérations, l'erreur accumulée est proportionnelle à $1/N$ qui est aussi faible que l'on veut si N est suffisamment grand.

Implémentation

Pour programmer l'algorithme d'Euler, il faut :

- ❏ calculer le pas $\mathrm{d}t$ connaissant le nombre N d'itérations et l'intervalle d'intégration ;
- ❏ initialiser des listes pour le temps t et pour la grandeur x étudiée avec leur valeur initiale ;
- ❏ dans une boucle, calculer de façon itérative les instants t_i et les valeurs x_i successives, et les ajouter aux listes t et x.

Les listes t et x obtenues constituent le résultat de l'algorithme.