[P4] Énergétique du point matériel

Exercice 1. Luge

1. On se place dans le référentiel terrestre lié à la pente, supposé galiléen, muni d'un repère cartésien $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ où O est le point en haut de la pente, $\vec{e}_x$ est le vecteur unitaire dirigé le long de la pente, et $\vec{e}_y$ le vecteur unitaire perpendiculaire à la pente et dirigé vers le haut.

   En l'absence de frottement, le système {enfant+luge} est soumis aux forces suivantes :
   — son poids $\vec{P} = m\vec{g}$, force conservative dérivsnt de l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p = mgz = -mgx\sin(\alpha)$;
   — la réaction normale de la pente $\vec{R}_N$, qui ne travaille pas.

   L'énergie mécanique du système est donc $\mathcal{E}_m = \dfrac{1}{2}mv^2 - mgx\sin(\alpha)$.

   Le système n'étant soumis qu'à des forces conservatives ou ne travaillant pas, son mouvement est conservatif : au point B en bas de la pente, $\mathcal{E}_m(B) = \mathcal{E}_m(O)$.

   Or, au point O, $v = 0$ et $x = 0$ donc $\dfrac{1}{2}mv_B^2 - mgd\sin(\alpha) = 0$.

   On en déduit sa vitesse au base de la pente : $\boxed{v = \sqrt{2gd\sin(\alpha)} = 26\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} = 93\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}}$.

2. On doit prendre en compte en plus une force de frottement $\vec{f} = -f\,\vec{e}_x$ qui n'est [as conservative. Son travail le long de la pente est $W_{OB}(\vec{f}) = -\vec{f}\cdot\overrightarrow{OB} = -f\,\vec{e}_x\cdot d\,\vec{e}_x = -fd$.

   Dans ce cas, le théorème de l'énergie mécanique s'écrit $\mathcal{E}_m(B) - \mathcal{E}_m(O) = W_{OB}(\vec{f})$ soit $\dfrac{1}{2}mv_B^2 - mgd\sin(\alpha) = -fd$.

   On en déduit l'intensité de la force de frottement : $\boxed{f = mg\sin(\alpha) - \dfrac{mv_B^2}{2d} = 39\,\mathrm{N}}$.

Exercice 2. Ressort de flipper

1. En l'absence de frottement, les seules forces exercées soit ne travaillent pas (réaction normale), soit sont conservatives (poids, force de rappel du ressort). Le mouvement est donc conservatif.

2. x correspond à la longueur du ressort donc l'énergie potentielle élastique vaut $\boxed{\mathcal{E}_{pe}(x) = \dfrac{1}{2}k(x-\ell_0)^2}$. L'altitude est $z = x\sin(\alpha)$ donc l'énergie potentielle de pesanteur vaut $\boxed{\mathcal{E}_{pp}(x) = mg\sin(\alpha)\,x}$.

3. L'énergie cinétique est initialement nulle, l'énergie potentielle de pesanteur également. L'énergie mécanique est donc égale à l'énergie potentielle élastique initiale : $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{pe}(x=0) = \frac{1}{2}k\ell_0^2$.

   Au moment où la bille quitte le ressort, $x = \ell_0$. Soit v_0 sa vitesse. Alors $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_{pe} + \mathcal{E}_{pp} = \frac{1}{2}mv_0^2 + mg\sin(\alpha)\ell_0$. Il vient $\boxed{v_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}\ell_0^2 - 2g\sin(\alpha)\ell_0}} = \underline{1{,}57\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}$.

4. Lorsque la bille quitte le ressort, l'énergie potentielle élastique disparaît. Au sommet de la trajectoire, l'énergie cinétique s'annule. On a donc $\mathcal{E}_{pp}(x_{\max}) = \mathcal{E}_m$. On en déduit $\boxed{x_{\max} = \dfrac{k\ell_0^2}{2mg\sin(\alpha)}} = \underline{1{,}30\,\mathrm{m}}$.

Exercice 3. Looping

1. En l'absence de frottement, l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = (1/2)mv^2 + mgz$ se conserve car le point matériel est soumis a son poids qui est une force conservative et à la réaction normale de la gouttière qui ne travaille pas.

2. L'énergie mécanique initiale vaut $\mathcal{E}_m = mgh$. Au point O, son expression est $(1/2)mv_0^2$ donc par conservation $(1/2)mv_0^2 = mgh$ d'où $v_0 = \sqrt{2gh}$.
   En un point quelconque du cercle, $z = a(1-\cos(\theta))$ donc $\mathcal{E}_m = (1/2)mv^2 + mga(1-\cos(\theta))$. On en déduit $\boxed{v = \sqrt{2g\,(h - a + a\cos(\theta))}}$.

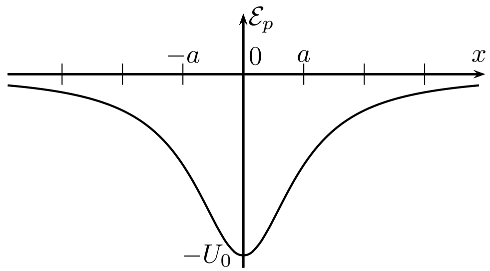
3. On utilise le PFD : $\vec{P} + \vec{R}_N = m\vec{a}$ que l'on projette sur le vecteur $\vec{e}_r$ de la base polaire : $P\cos(\theta) - R_N = ma_r = -ma\dot{\theta}^2$ d'où l'on tire $R_N = mg\cos(\theta) + ma\dot{\theta}^2$.
   Or la vitesse est liée à la vitesse angulaire par la relation $v = a\dot{\theta}$ donc $\boxed{R_N = mg\cos(\theta) + mv^2/a = mg(3\cos(\theta) - 2 + 2h/a)}$.

4. Le contact cesse lorsque $R_N = 0$ donc pour un angle θ_m tel que $\boxed{\cos(\theta_m) = \dfrac{2a-2h}{3a}}$.

   Cet angle existe si $\cos(\theta_m) \geqslant -1$ donc si $\boxed{h \leqslant 5a/2}$. Si h dépasse cette valeur limite, la bille fait un looping complet en restant collé à la gouttière.

Exercice 4. Piège à atomes

1. Le graphe de $\mathcal{E}_p = f(x)$ présente un « puits de potentiel » de profondeur U_0 autour de la position d'équilibre $x = 0$.



2. L'atome est immobile en sa position d'équilibre, soit en $\boxed{x=0}$.
3. L'atome demeure piégé dans le puits si $\mathcal{E}_m < 0$ (trajectoire bornée). Or $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv_0^2 - U_0$ donc $\boxed{v_0 < v_{\max} = \sqrt{\dfrac{2U_0}{m}}}$.
4. Si $v_0 \ll v_{\max}$, l'atome effectue des « petites oscillations » autour de sa position d'équilibre.

   On écrit le développement de Taylor-Lagrange de $\mathcal{E}_p$ autour de 0. $E_p'(x) = U_0\dfrac{2x/a^2}{(1+x^2/a^2)^2}$ et $E_p''(x) = U_0\dfrac{2/a^2}{(1+x^2/a^2)^2} - 2U_0 \times \dfrac{(2x/a^2)^2}{(1+x^2/a^2)^3}$. Ainsi, $\mathcal{E}_p(x) = -U_0 + \frac{1}{2} \times U_0\dfrac{2/a^2}{\times}x^2 + o(x^2)$.

   La vitesse sur l'axe (Ox) s'écrit $v = \dot{x}$. L'énergie mécanique a donc pour expression approchée : $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - U_0 + U_0\dfrac{x^2}{a^2}$.

   L'énergie mécanique se conserve donc $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = 0$ soit $m\dot{x}\ddot{x} + 2\dfrac{U_0}{a^2}x\dot{x} = 0$.

   On obtient une équation différentielle caractéristique d'un oscillateur harmonique : $\ddot{x} + \dfrac{2U_0}{ma^2}x = 0$.

   La pulsation propre est $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{2U_0}{ma^2}}$ donc la période propre $\boxed{T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\dfrac{ma^2}{2U_0}}}$.

Exercice 5. Toboggan

1. Au bout de n tours, l'angle vaut $\theta = 2\pi n$ d'où $z = 2\pi\alpha n$ qui correspond à la hauteur de du toboggan. Donc $\boxed{\alpha = \dfrac{h}{2\pi n} = 0{,}28\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{rad}^{-1}}$.
2. Le système {baigneur} assimilé à un point matériel est soumis à son poids, force conservative, et à la réaction normale du toboggan, qui ne travaille pas. Son énergie mécanique se conserve donc.

   En prenant une énergie potentielle de pesanteur nulle en haut du toboggan, $\mathcal{E}_{pp} = -mgz$ (le signe $-$ vient de l'orientation descendante de l'axe vertical).

   L'énergie mécanique vaut donc $\mathcal{E}_m = \dfrac{1}{2}mv^2 - mgz$. Initialement $v = 0$ et $z = 0$ donc $\mathcal{E}_m = 0$. En bas du toboggan, $\mathcal{E}_m = \dfrac{1}{2}mv_f^2 - mgh = 0$ d'où une vitesse finale $\boxed{v_f = \sqrt{2gh} = 8{,}9\,\mathrm{m}\cdot{}^{-1}}$.
3. En un point M quelconque, avec les coordonnées cylindriques, $\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r + z\vec{e}_z$ et $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$. Or $\theta = z/\alpha$ donc $\vec{v} = \dot{z}\left(\vec{e}_z + (R/\alpha)\vec{e}_\theta\right)$ d'où $v^2 = \dot{z}^2\left(1 + (R/\alpha)^2\right)$.

   L'énergie mécanique s'écrit donc $\mathcal{E}_m = \dfrac{1}{2}m\dot{z}^2\left(1 + (R/\alpha)^2\right) - mgz$.

   Elle se conserve lors du mouvement soit $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = 0$. On en déduit $m\dot{z}\ddot{z}\left(1 + (R/\alpha)^2\right) - mg\dot{z} = 0$ puis $\boxed{\ddot{z} = \dfrac{g}{1 + (R/\alpha)^2}}$.
4. On intègre, la vitesse étant nulle initialement : $\dot{z} = \dfrac{g}{1+(R/\alpha)^2}t$ puis $z(t) = \dfrac{g}{2\left(1+(R/\alpha)^2\right)}t^2$.

   La durée t_f de la glissade est telle que $z(t_f) = h$ soit $\boxed{t_f = \sqrt{\dfrac{2h\left(1+(R/\alpha)^2\right)}{g}} = 6{,}6\,\mathrm{s}}$.

Exercice 6. Bifurcation

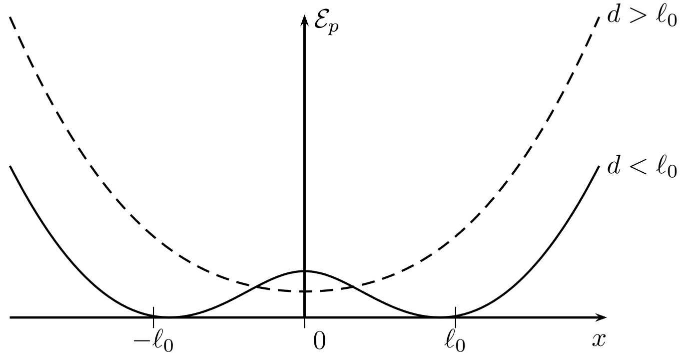
1. $\boxed{\mathcal{E}_p = (1/2)k(\ell - \ell_0)^2 = (1/2)k(\sqrt{d^2+x^2} - \ell_0)^2}$.
2. On cherche les positions où la dérivée de l'énergie potentielle s'annule.

   $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}x} = kx\dot{x}\dfrac{\sqrt{x^2+d^2} - \ell_0}{\sqrt{x^2+d^2}}$.

   $x = 0$ est toujours position d'équilibre. Il existe aussi 2 positions d'équilibre en $x = \pm\sqrt{\ell_0^2 - d^2}$ à condition que $d < \ell_0$.
3. La dérivée seconde a pour expression $\dfrac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}x^2} = k\left(1 - \ell_0 d^2/(x^2+d^2)^{3/2}\right)$.

   En $x = 0$ on obtient $\dfrac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}x^2} = k(1 - \ell_0/d)$: cette position d'équilibre est stable si $d > \ell_0$ (quand c'est l'unique position d'équilibre) et instable sinon.

   En $x = \pm\sqrt{\ell_0^2 - d^2}$ on obtient $\dfrac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}x^2} = k(1 - d^2/\ell_0^2)$: ces positions d'équilibre sont stables si $d < \ell_0$ c'est-à-dire dès qu'elles existent.
4. Graphe



5. La fourche est l'allure du graphe obtenue.

   En trait plein, on indique les positions d'équilibre stable, et en tirets les positions d'équilibre instable.