

## Fiche 15 : TD du 09-10.

### Exercice 1

Résoudre le système :

$$\begin{cases} \cos(x) &= -\frac{3}{5} \\ \sin(x) &= -\frac{4}{5} \end{cases},$$

d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$ .

### Exercice 2

1. À l'aide de la fonction arctan, déterminer des arguments des nombres complexes :  $(2 + i)$ ,  $(7 + i)$  et  $(1 + i)$ .
2. Montrer la relation :

$$2(2 + i)^2 = (1 + i)(7 + i)$$

3. En déduire la formule :

$$2 \arctan\left(\frac{1}{2}\right) - \arctan\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{\pi}{4}$$

4. En s'inspirant de ce qui précède, montrer :

$$\frac{\pi}{4} = 2 \arctan\left(\frac{1}{3}\right) + \arctan\left(\frac{1}{7}\right)$$

5. Montrer la relation :

$$\frac{(5 + i)^4}{(239 + i)} = 2(1 + i)$$

6. En déduire une autre formule concernant  $\frac{\pi}{4}$  (formule de MACHIN).

### Exercice 3

Établir l'inégalité suivante :

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \frac{2x}{\pi} \leq \sin(x) \leq x$$

### Exercice 4

On considère la fonction  $f : x \mapsto \arcsin[\sin(\arccos(\cos(x)))]$ .

1. Déterminer le domaine de définition de  $f$ .
2. Montrer que  $f$  est paire.
3. Montrer que :

$$\forall u \in [-1, 1], \arccos(-u) + \arccos(u) = \pi.$$

4. En déduire que  $f$  est  $\pi$ -périodique.
5. Tracer le graphe de  $f$ .

### Exercice 5

On souhaite étudier la fonction définie pour  $x \in \mathbb{R}$  :

$$f(x) = \arccos\left(\frac{1 - x^2}{1 + x^2}\right)$$

1. Vérifier que  $f$  est bien définie sur  $\mathbb{R}$ , et est une fonction paire.
2. Justifier que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R} - \{0\}$ .
3. Calculer  $f'(x)$  pour  $x > 0$ .
4. Montrer que si  $x \geq 0$  alors  $f(x) = 2 \arctan(x)$  (on pourra calculer  $f(1)$ ).
5. Donner une formule analogue pour  $x < 0$ .