

Chapitre 5 : Primitives et équations différentielles

Plan

1	Primitives	1
2	Outils de calcul	2
3	Équations différentielles linéaires du premier ordre	5
3.1	Équation générale	5
3.2	Équation homogène	5
3.3	Équation avec second membre	7
3.4	Détermination d'une solution particulière de (E)	7
3.5	Synthèse	8

1 Primitives

On considère I un intervalle de $\mathbb{R}$. Les fonctions considérées dans cette section sont à valeurs dans $\mathbb{C}$ mais souvent en fait dans $\mathbb{R}$.

Définition 1 Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I . La fonction F est une **primitive** de f sur I quand F est dérivable sur I et pour tout x de I :

$$F'(x) = f(x)$$

ou

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

Dans ce cas, on peut noter (Attention : cette notation est pratique mais peut poser des problèmes) :

$$F(x) = \int f(x) \, dx$$

Propriété 1 Si les fonctions F et G sont définies sur un intervalle I et sont toutes 2 primitives d'une même fonction f alors F et G diffèrent d'une constante k .

Autrement dit : Si : $(\forall x \in I) \quad F'(x) = G'(x)$ alors : $\exists k \in \mathbb{C} \quad (\forall x \in I) \quad F(x) = G(x) + k$.

Rappelons que si f est continue sur un intervalle I , F est une primitive de f sur I , et si a et b sont 2 points de I alors :

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b$$

la valeur obtenue ne dépendant pas de la primitive choisie.

Théorème 1 Étant donné une fonction continue sur un intervalle I et a un point de I .

1. La fonction $x \rightarrow \int_a^x f(t). dt$ est l'unique primitive de f sur I nulle en a .
2. Si F est une primitive de f sur I alors, pour tout x de I :

$$F(x) = \int_a^x f(t). dt + F(a)$$

On dit qu'une fonction f est **de classe $\mathcal{C}^1$** sur un intervalle I si elle est dérivable et à dérivée continue sur I .

On peut réécrire le théorème précédent sous la forme :

Propriété 2 Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et a un point de I alors, pour tout $x \in I$:

$$f(x) = \int_a^x f'(t) dt + f(a)$$

2 Outils de calcul

Le tableau des primitives classiques (à connaître par coeur !) :

Fonction f	Primitive F	Domaine de validité
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{x^p}$	$-\frac{1}{p-1}x^{p-1}$	$p \in \mathbb{N} - \{0, 1\}, x \in \mathbb{R}^*$
x^α	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$	$\alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}, x \in \mathbb{R}_+^*$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	$x \in \mathbb{R}^*$
e^x	e^x	
$\ln(x)$	$x \ln(x) - x$	$x \in \mathbb{R}_+^*$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	
$\tan(x)$	$-\ln(\cos(x))$	$\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k.\pi/k \in \mathbb{Z} \right\}$
$\operatorname{ch}(x)$	$\operatorname{sh}(x)$	
$\operatorname{sh}(x)$	$\operatorname{ch}(x)$	
$\operatorname{th}(x)$	$\ln(\operatorname{ch}(x))$	
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$-1 < x < 1$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	

L'astuce" suivante sera généralisée dans un chapitre ultérieur. Il faut y penser par soi-même :

Si $x \neq \pm 1$:

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{(x+1) - (x-1)}{2(x+1)(x-1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{(x+1)} \right)$$

Du coup sur $] -1, 1[$

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} (\ln(1-x) - \ln(1+x)) \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \right)$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$$

La formule suivante est un outil technique important.

Théorème 2 (Intégration par parties) Soit f et g 2 fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $I = [a, b]$. On a :

$$\int_a^b f'(t).g(t) dt = [f(t).g(t)]_a^b - \int_a^b f(t).g'(t) dt$$

En termes de primitives, on écrira, si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$:

$$f'(x).g(x) = \frac{d}{dx} (f(x).g(x)) - f(x).g'(x)$$

$$\int f'(x).g(x) dx = f(x).g(x) - \int f(x).g'(x) dx$$

On peut aussi écrire :

Théorème 3 (Intégration par parties) *Si f est une fonction continue, F est une primitive de f , et g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $I = [a, b]$. On a :*

$$\int_a^b f(t).g(t) dt = [F(t).g(t)]_a^b - \int_a^b F(t).g'(t) dt$$

En termes de primitives, on écrira, si f est continue de primitive F et g de classe $\mathcal{C}^1$:

$$f(x).g(x) = \frac{d}{dx} (F(x).g(x)) - F(x).g'(x)$$

$$\int f(x).g(x) dx = F(x).g(x) - \int F(x).g'(x) dx$$

Cette formule permet en particulier de calculer des primitives pour les fonctions $\ln$ et les divers $\arcsin$.

La seconde formule importante est :

Théorème 4 (Changement de variable (1)) *Soit f une fonction continue sur un segment I et une fonction ϕ à valeurs dans I et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha, \beta]$, alors :*

$$\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(u))\phi'(u) du$$

Théorème 5 (Changement de variable (2)) *Soit f une fonction continue sur un segment I et une fonction ϕ à valeurs dans I , de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone sur $[\alpha, \beta]$ avec $a = \phi(\alpha)$ et $b = \phi(\beta)$.*

ϕ est alors bijective et :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(u))\phi'(u) du$$

Ainsi, pour appliquer cette formule, c'est à dire faire le "changement de variable $t = \phi(u)$ ", il faut :

- Remplacer les bornes a et b par $\phi^{-1}(a)$ et $\phi^{-1}(b)$ autrement dit les valeurs de u telles que $\phi(u) = a$ et $\phi(u) = b$,
- Remplacer $f(t)$ par $f(\phi(u))$,
- Remplacer dt par $\phi'(u)du$ qui correspond à la formule : $dt = d(\phi(u)) = \phi'(u) du$

3 Équations différentielles linéaires du premier ordre

On fixe un intervalle I .

3.1 Équation générale

On considère deux fonctions $t \rightarrow a(t)$ et $t \rightarrow b(t)$ définies (continues) réelles ou complexes sur I .

On appelle **équation différentielle linéaire du premier ordre** le problème :

Trouver les fonctions $t \rightarrow y(t)$ définies et dérivables sur I telles que :

$$(E) : \quad y'(t) + a(t) \cdot y(t) = b(t)$$

On dit qu'on fixe une condition initiale en $t_0 \in I$ si on impose de plus $y(t_0) = y_0$ où $y_0 \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On s'intéresse alors en fait au système qu'on appelle **équation différentielle (linéaire du premier ordre) avec condition initiale**, ou **problème de Cauchy** :

$$(E) \begin{cases} y'(t) + a(t) \cdot y(t) = b(t) \\ y(t_0) = \lambda \end{cases}$$

Le **second membre** est la fonction $b(t)$. Si $b = 0$, on dit que l'équation est **homogène** (ou "sans second membre"). Sinon, on s'intéresse dans un premier temps à l'**équation homogène** associée :

$$(E_0) \quad y'(t) + a(t) \cdot y(t) = 0 \text{ c'est à dire } y'(t) = -a(t) \cdot y(t)$$

*Le cas où $a(t) = a$ est une fonction **constante** a été traité dans un chapitre précédent qu'il faut revoir.*

3.2 Équation homogène

On considère sur un intervalle I une équation homogène écrite sous la forme :

$$(E_0) \quad y'(t) + a(t)y(t) = 0 \text{ ou } \frac{dy(t)}{dt} + a(t)y(t) = 0$$

On note $A(t)$ la primitive de $a(t)$ sur I nulle en 0.

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} + a(t)y(t) &= 0 \\ \exp(A(t))y'(t) + a(t)\exp(A(t))y(t) &= 0 \\ \frac{\exp(A(t)) \cdot y(t)}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

Il existe donc un réel λ tel que (avec réciproque vérifiée) :

$$\begin{aligned}\exp(A(t)).y(t) &= \lambda \\ y(t) &= \lambda \exp(-A(t))\end{aligned}$$

On obtient ainsi :

Théorème 6 *L'équation différentielle définie sur l'intervalle $I \ni t_0$ avec condition initiale en t_0 (dite **de Cauchy**) :*

$$\begin{cases} y'(t) = -a(t)y(t) \\ y(t_0) = \lambda \end{cases}$$

a une et une seule solution sur l'intervalle I la fonction définie par :

$$y(t) = \lambda.e^{-A(t)}$$

où $A(t)$ est la primitive de $a(t)$ sur I nulle en 0. Plus généralement, si $A(t)$ est une primitive quelconque de $a(t)$ alors l'unique solution est :

$$y(t) = \lambda e^{A(t_0)-A(t)}$$

Concernant les équations sans condition initiale :

Théorème 7 *L'équation différentielle homogène :*

$$y'(t) = -a(t)y(t)$$

où $a(t)$ est une fonction définie (et continue) sur un intervalle I a pour seules solutions sur l'intervalle I les fonctions définies par :

$$y(t) = \lambda.e^{-A(t)}$$

où $A(t)$ est une primitive fixée (quelconque) de $a(t)$ et λ est un paramètre réel (complexe si on cherche les solutions complexes).

On dira dans ces conditions que l'équation différentielle homogène

$$y'(t) = -a(t)y(t)$$

a pour **solution générale**

$$y(t) = \lambda e^{-A(t)}.$$

3.3 Équation avec second membre

On s'intéresse maintenant à l'équation avec second membre définie sur un intervalle I :

$$(E) : \quad y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$$

Imaginons qu'on connaisse une solution fixée (dite **solution particulière**) $y_1(t)$ de (E) , alors $y(t)$ est solution de (E) si et seulement si :

$$(y(t) - y_1(t))' = -a(t)(y(t) - y_1(t))$$

autrement dit, si et seulement si $y_0(t) = y(t) - y_1(t)$ est une solution de l'équation homogène :

$$(E_0) : \quad y_0'(t) = -a(t)y_0(t).$$

On a donc le résultat suivant :

Théorème 8 *Si la fonction $y_1(t)$ est une solution particulière fixée de (E) alors toute solution de (E) s'écrit sous la forme :*

$$y(t) = y_0(t) + y_1(t)$$

où $y_0(t)$ est une solution de l'équation homogène (E_0) . Réciproquement, si $y_0(t)$ est une solution (quelconque) de (E_0) alors $y(t) = y_0(t) + y_1(t)$ est une solution de (E) .

*On dira que : **la solution générale de (E) est obtenue en ajoutant à une solution particulière de (E) la solution générale de (E_0) .***

La solution générale de (E_0) est donc donnée par $y(t) = y_1(t) + \lambda e^{-A(t)}$ où $A(t)$ est une primitive de $a(t)$ et $y_1(t)$ une solution particulière de (E) . Le coefficient λ est déterminé le cas échéant par les conditions initiales.

3.4 Détermination d'une solution particulière de (E)

Il reste à déterminer une solution particulière de (E) :

$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$$

À défaut de solution simple (voir le chapitre 3), on peut utiliser la méthode dite de **variation de la constante** :

On cherche une solution particulière sous la forme :

$$y_1(t) = \lambda(t)e^{-A(t)}$$

En pratique, la condition précédente entraîne : $\lambda'(t) = b(t)e^{-A(t)}$ et donc on peut prendre :

$$\lambda(t) = \int_{t_0}^t b(u)e^{-A(u)} \cdot du$$

On peut donc toujours trouver une solution particulière au prix du calcul d'une primitive.

Dans le cas où l'équation se met naturellement sous la forme :

$$(E) : \quad y'(t) + a(t)y(t) = b_1(t) + b_2(t)$$

il peut être intéressant de chercher une solution particulière $y_1(t)$ à l'équation :

$$(E_1) : \quad y'(t) + a(t)y(t) = b_1(t)$$

puis une solution particulière $y_2(t)$ à l'équation :

$$(E_2) : \quad y'(t) + a(t)y(t) = b_2(t)$$

On obtient alors une solution particulière à (E) en posant :

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

Cette méthode s'appelle le **principe de superposition**.

En rassemblant les différents résultats, on obtient :

Théorème 9 *L'équation différentielle $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$ où $a(t)$ et $b(t)$ sont des fonctions définies et continues sur un intervalle I avec la condition initiale (dite **de Cauchy**) : $y(t_0) = y_0$ ($t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{C}$) a une et une seule solution qui est définie sur I .*

3.5 Synthèse

Pour résoudre l'équation différentielle $(E) : y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$, on suit donc les étapes suivantes :

1. On résout l'équation homogène associée $(E_0) : y'(t) = -a(t)y(t)$. Sa solution générale a la forme $y_0(t) = \lambda e^{-A(t)}$.
2. On cherche une solution particulière de (E) sous une forme simple ou sous la forme : $y_1(t) = \lambda(t)e^{-A(t)}$ (méthode de variation de la constante), éventuellement via le principe de superposition si le second membre est une somme.
3. La solution générale de (E) a alors la forme : $y(t) = y_1(t) + \lambda e^{-A(t)}$.
4. On détermine si besoin λ à l'aide des conditions initiales.

Savoirs et savoirs faire indispensables

Savoirs

Tableau des dérivées et des primitives, formules d'intégration par parties et de changement de variables.

Savoir-faire

Calculs de primitives simples éventuellement par changement de variables, intégration par parties.

Résolution des équations différentielles linéaires d'ordre 1 éventuellement par variation de la constante.