Fiche 17 : Td du 17-10.

Exercice 1

Donner la solution générale des équations différentielles suivantes (inconnue $t \to y(t)$ définie sur $\mathbb{R}$) :

1. $y'' - 4y' + 4y = 1 + e^t$
2. $y'' + 4y' - 5y = 2e^t$
3. $y'' + 2y' + y = \sin(2t)$
4. $y'' + y = \cos(t)$
5. $y'' - 2y' + y = 2e^t \sin(t)$

Exercice 2

Résoudre le problème de Cauchy (inconnue $x \to y(x)$ définie sur $\mathbb{R}$) :

$$\begin{cases} y'' + 4y = \sin(x) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

Exercice 3

Calculer des primitives des expressions suivantes :

$$\sin^2(x) \quad ; \quad \frac{1}{1+x^2} \quad ; \quad \frac{x}{1+x^2} \quad ; \quad \frac{x^2}{1+x^2}$$

$$x\exp(x^2) \quad ; \quad \frac{1}{1-x^2} \quad ; \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad ; \quad \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

On précisera le domaine de validité des calculs

Exercice 4

Linéariser l'expression $\sin^3(t)$ et en déduire une primitive de l'expression $\sin^3(t)$.

Exercice 5

Calculer des primitives des expressions suivantes. On donnera l'intervalle de validité du calcul.

$$\tan(t) \quad ; \quad 2^t \quad ; \quad (e^t + 2)^2 \quad ; \quad \sqrt{2t+1} \quad ;$$

$$\ln(t^2 - 4) \quad ; \quad \cos(t)\sin^5(t) \quad ; \quad \frac{1}{e^t + 1} \quad ;$$

Exercice 6

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} y'' = -\omega^2 y \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

les inconnues sont : y fonction 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\omega > 0$.

1. Montrer que sauf pour certaines valeurs de ω, on a forcément $y = 0$.
2. Représenter l'allure des solutions y non nulles quand il y en a.

Exercice 7

Déterminer l'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f'(x) + f(-x) = e^x$$

(On dérivera la relation précédente).