

PROBLÈME I

Ecoulement sanguin

I.1) Le Pascal est l'unité SI de la pression, qui s'exprime comme une force divisée par l'aire d'une surface. La dimension d'une force est $M.L.T^{-2}$, celle d'une surface L^2 , la pression a donc pour dimension $M.L^{-1}.T^{-2}$.

La seconde étant l'unité SI du temps, on en déduit que la dimension de la viscosité est : $\dim(\eta) = M.L^{-1}.T^{-1}$.

I.2) Puisque $\dim(d) = L$, $\dim(\rho) = M.L^{-3}$ et $\dim(\eta) = M.L^{-1}.T^{-1}$, on obtient que la dimension de $\frac{\eta}{d\rho}$ est $L.T^{-1}$, qui est celle d'une vitesse.

La relation proposée est donc homogène, elle est valable *a priori*.

I.3) $k = v_{\text{lim}} \frac{d\rho}{\eta} = 2,3 \times 10^3.$

I.4) Si on multiplie le diamètre par 2 et la viscosité par 6 sans changer la masse volumique, la vitesse limite est multipliée par 3. Elle vaut donc $v_{\text{lim}} = 0,69 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 69 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$. Ainsi la vitesse du sang y est inférieure à la vitesse limite, l'écoulement est laminaire.

I.5) Soit β le facteur de réduction du diamètre de l'aorte, c'est-à-dire $\beta = \frac{d}{d'}$ (le prime avec cholestérol). Alors v_{lim} est multipliée par β tandis que la vitesse du sang est multipliée par $\alpha = \beta^2$ (car l'aire est proportionnelle au carré du diamètre). Le changement de régime se produit lorsque $v' = v'_{\text{lim}}$, soit $\beta^2 v = \beta v_{\text{lim}}$. On trouve $\beta = \frac{v_{\text{lim}}}{v}$ c'est-à-dire un diamètre

$$d' = \frac{d}{\beta} = \frac{dv}{v_{\text{lim}}} = 0,96 \text{ cm}.$$

PROBLÈME II

Volant de badminton

II.1) On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen muni du repère cartésien $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ avec O à la position initiale du volant et $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ indiqués sur le schéma.

Le volant est en chute libre : il n'est soumis à son poids $\vec{P} = -mg\vec{e}_y$. D'après la deuxième loi de Newton, $\vec{P} = m\vec{a}$ d'où $\vec{a} = -g\vec{e}_y$.

Puisque $\vec{a} = \dot{\vec{v}}$ et $\vec{v}(t=0) = \vec{v}_0 = U_0 \cos(\theta_0)\vec{e}_x + U_0 \sin(\theta_0)\vec{e}_y$, $\vec{v}(t) = \vec{a}t + \vec{v}_0 = (U_0 \cos(\theta_0))\vec{e}_x + (-gt + U_0 \sin(\theta_0))\vec{e}_y$.

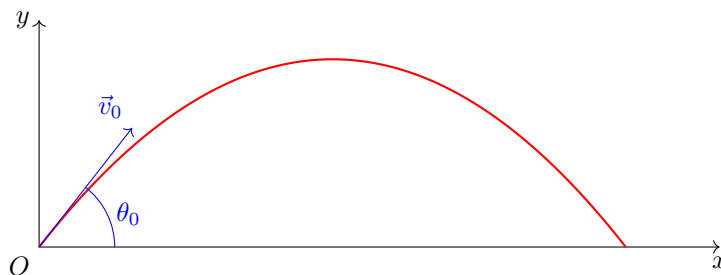
$\vec{v} = \dot{\vec{OM}}$ et $\vec{OM}(t=0) = \vec{0}$ donc $\vec{OM}(t) = \frac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{v}_0t = (U_0 \cos(\theta_0)t)\vec{e}_x + (-\frac{1}{2}gt^2 + U_0 \sin(\theta_0)t)\vec{e}_y$.

On a donc $x = U_0 \cos(\theta_0)t$ et $y = -\frac{1}{2}gt^2 + U_0 \sin(\theta_0)t$.

On isole $t = \frac{x}{U_0 \cos(\theta_0)}$ que l'on reporte dans l'équation horaire de y pour obtenir l'équation de la trajectoire :

$$y = -\frac{g}{2U_0^2 \cos^2(\theta_0)}x^2 + \frac{\sin(\theta_0)}{\cos(\theta_0)}x$$

C'est une parabole inversée.



II.2) La portée L_0 vérifie $y(L_0) = 0$. Puisque $L_0 \neq 0$, on obtient

$$L_0 = \frac{2U_0^2 \sin(\theta_0) \cos(\theta_0)}{g} = \frac{U_0^2}{g} \sin(2\theta_0) = 3,3 \times 10^2 \text{ m}$$

C'est bien plus que la distance mesurée de 9 m : les frottements ne peuvent être négligés.

II.3) Le volant est soumis au poids et à la force de frottement de l'air $\vec{F} = -\frac{1}{2}\rho SC_x U^2 \vec{u}_t$ où $\vec{u}_t$ est le vecteur tangent.

Si l'accélération est négligeable, le vecteur vitesse est une constante : le mouvement est rectiligne et uniforme à la vitesse U_∞ .

Les forces appliquées au volant se compensent donc. Puisque le poids est selon $-\vec{e}_y$, la force de frottement est selon $+\vec{e}_y$, ce qui signifie que le mouvement est vertical descendant. La force de frottement s'écrit alors $\vec{F} = \frac{1}{2}\rho SC_x U_\infty^2 \vec{e}_y$.

D'après la deuxième loi de Newton, $\vec{P} + \vec{F} = m\vec{a} \approx \vec{0}$ soit en projetant sur $\vec{e}_y$: $\frac{1}{2}\rho SC_x U_\infty^2 - mg = 0$. La vitesse limite a pour

expression
$$U_\infty = \sqrt{\frac{2mg}{\rho SC_x}}.$$

II.4) Le poids est négligeable devant la force de frottement de l'air si $\frac{P}{F} \ll 1$ c'est-à-dire si $\frac{mg}{\frac{1}{2}\rho SC_x U^2} \ll 1 \Leftrightarrow \frac{U_\infty^2}{U^2} \ll 1$.

La condition est donc
$$\left(\frac{U}{U_\infty}\right)^2 \gg 1.$$

II.5) Si on néglige le poids, le mouvement est rectiligne car la force de frottement est tangentielle donc ne dévie pas la trajectoire.

En notant $\vec{u}_{x'}$ le vecteur unitaire correspondant à cette direction, la force de frottement s'écrit : $\vec{F} = -\frac{1}{2}\rho SC_x U^2 \vec{u}_{x'}$.

D'après la deuxième loi de Newton, $\vec{F} = m\vec{a}$ avec $\vec{a} = a_{x'} \vec{u}_{x'} = \dot{U} \vec{u}_{x'}$.

En projetant sur $\vec{u}_{x'}$, il vient : $m\dot{U} = -\frac{1}{2}\rho SC_x U^2$ qui se met sous la forme :

$$\dot{U} = -\frac{g}{U_\infty^2} U^2$$

II.6) Avec l'expression proposée :

$$\dot{U} = -U_0 \times \left(\frac{gU_0}{U_\infty^2}\right) \times \frac{1}{\left(1 + \frac{gU_0}{U_\infty^2} t\right)^2} = -\frac{g}{U_\infty^2} \times \frac{U_0^2}{\left(1 + \frac{gU_0}{U_\infty^2} t\right)^2} = -\frac{g}{U_\infty^2} U^2$$

L'équation différentielle est effectivement vérifiée.

De plus l'expression donne $U(t=0) = U_0$ ce qui est conforme à la condition initiale.

II.7) La distance parcourue est obtenue en intégrant la vitesse :

$$d(t) = \int_0^t \frac{U_0}{1 + \frac{gU_0}{U_\infty^2} t} dt = \left[U_0 \frac{U_\infty^2}{gU_0} \ln \left(1 + \frac{gU_0}{U_\infty^2} t \right) \right]_0^t$$

soit
$$d(t) = \frac{U_\infty^2}{g} \ln \left(1 + \frac{gU_0}{U_\infty^2} t \right).$$

II.8) On cherche t_1 tel que $U(t_1) = U_\infty$. Il vient
$$t_1 = \frac{U_\infty}{g} \left(1 - \frac{U_\infty}{U_0} \right) = 0,60 \text{ s}.$$

À cet instant :
$$d(t_1) = \frac{U_\infty^2}{g} \ln \left(\frac{U_0}{U_\infty} \right) = 9,9 \text{ m}.$$

II.9) L'intervalle de temps séparant deux positions du volant étant de 50 ms, l'instant t_1 correspond à la position numéro 12. On vérifie que la vitesse est effectivement de l'ordre de grandeur de la vitesse finale, la distance séparant deux positions successives étant quasiment la même qu'à la fin du mouvement.

On mesure sur la chronophotographie une distance parcourue de 7,25 cm. Or l'échelle de la figure est de 8,3 cm pour 9 m en réalité. Ainsi la distance parcourue réellement à l'instant t_1 est $d_{\text{exp}} = \frac{7,25}{8,3} \times 9 \text{ m} = \underline{7,9 \text{ m}}$.

L'écart est important avec le résultat théorique. Cela vient de l'hypothèse de poids négligeable qui est loin d'être vérifiée tout le long de ce régime en réalité. En effet le rapport $\frac{U}{U_\infty}$ tend vers 1 à la fin du régime 1, la condition évoquée à la question II.4) n'est plus satisfaite.

II.10) On peut proposer $t_2 = \frac{U_\infty}{g}$. En effet, $\dim\left(\frac{U_\infty^2}{g}\right) = \frac{\dim(U_\infty)}{\dim(g)} = \frac{\text{L.T}^{-1}}{\text{L.T}^{-2}} = \text{T}$.

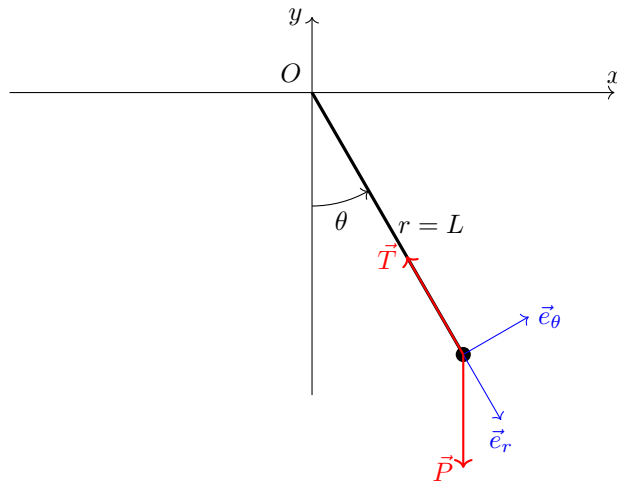
II.11) $t_2 = 0,68 \text{ s}$ donc $t_1 + t_2 = 1,28 \text{ s}$: la position est la numéro 26.

Sur la chronophotographie, on observe que la distance séparant les positions est quasi constante à partir de ce moment-là, le mouvement est donc effectivement uniforme. Cependant il n'est pas tout à fait rectiligne, et encore moins vertical comme il devrait l'être selon le modèle. Le régime limite n'est atteint qu'au bout d'un temps bien plus long, non observé car le volant est arrêté par le sol dans sa chute.

PROBLÈME III

Rupture du fil d'un pendule

III.1) On utilise les coordonnées polaires (r, θ) de centre O et la base associée $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$.



On s'intéresse au mouvement de la masse dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Elle est soumise à son poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg(\cos(\theta)\vec{e}_r - \sin(\theta)\vec{e}_\theta)$, et à la tension du fil, $\vec{T} = -T\vec{e}_r$.

L'accélération dans le cas d'un mouvement circulaire où $r = L$ est $\vec{a} = -L\dot{\theta}^2\vec{e}_r + L\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$.

D'après la deuxième loi de Newton : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$, soit en projetant sur $\vec{e}_\theta$ pour que $\vec{T}$ n'apparaisse plus : $mL\ddot{\theta} = -mg\sin(\theta)$

ou $\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin(\theta) = 0$.

III.2) Les conditions initiales sont donc $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$ (masse lâchée sans vitesse). La masse étant lâchée avec l'angle θ_0 toutes les valeurs de $\theta(t)$ y seront inférieures. Or, pour de petits angles on a $\sin \theta \approx \theta$, et l'équation du mouvement devient donc $\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$ qui est l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$.

La solution est donc de la forme $\theta(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$. En dérivant, on obtient $\dot{\theta}(t) = -A\omega_0\sin(\omega_0 t) + B\cos(\omega_0 t)$.

Les conditions initiales s'écrivent alors $A = \theta_0$ et $B = 0$ donc $\theta(t) = \theta_0\cos(\omega_0 t)$.

Cette solution est périodique, de période $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$.

III.3) En multipliant l'équation du mouvement par $\dot{\theta}$, on obtient $L\dot{\theta}\ddot{\theta} + g\dot{\theta}\sin\theta = 0$ soit $\frac{d}{dt}\left(\frac{L\dot{\theta}^2}{2} - g\cos\theta\right) = 0$.

On intègre : $L\frac{\dot{\theta}^2}{2} - g\cos\theta = \text{cste}$, où la constante peut-être déterminée par la valeur de la fonction à $t = 0$. Puisque $\theta(t=0) = -\frac{\pi}{2}$ et $\dot{\theta}(t=0) = 0$ la constante vaut 0.

On a donc effectivement $\dot{\theta}^2 = 2\frac{g}{L}\cos(\theta)$.

III.4) On a en projetant la deuxième de Newton sur $\vec{e}_r$: $-mL\dot{\theta}^2 = mg\cos(\theta) - T$, soit $T = mg\cos(\theta) + mL\dot{\theta}^2$.

En utilisant le résultat de la question précédente, on obtient $T = 3mg\cos(\theta)$.

La tension de rupture est donc $T_{\text{rup}} = 3mg\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3mg}{\sqrt{2}}$. Or à l'équilibre, la masse est uniquement soumise à son poids et à la tension du fil, qui se compensent donc, et on a $T_{eq} = mg$. Or $T_{\text{rup}} > T_{eq}$: le fil ne casse pas à l'équilibre.

III.5) En général, le vecteur position est $\vec{OM} = L\vec{e}_r = L\sin(\theta)\vec{e}_x - L\cos(\theta)\vec{e}_y$.

Au point de rupture, $\theta = -\frac{\pi}{4}$ donc $\vec{OM}_{\text{rup}} = -(L/\sqrt{2})(\vec{e}_x + \vec{e}_y)$. Les composantes de $\vec{OM}$ sont : $x_0 = y_0 = -L/\sqrt{2}$.

Le vecteur vitesse est en général $\vec{v} = L\dot{\theta}\vec{e}_\theta = L\dot{\theta}(\cos(\theta)\vec{e}_x + \sin(\theta)\vec{e}_y)$.

Au moment de la rupture, $\dot{\theta} = \sqrt{\sqrt{2}\frac{g}{L}}$. Il vient $\vec{v}_{\text{rup}}\sqrt{\frac{gL}{\sqrt{2}}}(\vec{e}_x - \vec{e}_y)$. Les composantes du vecteur vitesse sont $v_{0x} = \sqrt{gL/\sqrt{2}}$

et $v_{0y} = -\sqrt{gL/\sqrt{2}}$.

III.6) Dans la suite on a un mouvement de chute libre.

On obtient les équations horaires du mouvement suivantes : $x(t) = x_0 + v_{0x}t$ et $y(t) = y_0 + v_{0y}t - gt^2/2$, ce qui donne une trajectoire d'équation $y(x) = y_0 + (x - x_0)v_{0y}/v_{0x} + g(x - x_0)^2/(2v_{0x}^2)$ soit ici $y(x) = -L/\sqrt{2} - (x + L/\sqrt{2}) - g(x + L/\sqrt{2})^2/(\sqrt{2}gL)$.

Sous le point d'attache, en $x = 0$, l'ordonnée est $y(0) = -\sqrt{2}L - \frac{gL^2/2}{\sqrt{2}gL} = -\frac{5L}{2\sqrt{2}}$.

Par conséquent, il faut placer le point d'attache à une hauteur $h = \frac{5L}{2\sqrt{2}}$ au-dessus du sol.