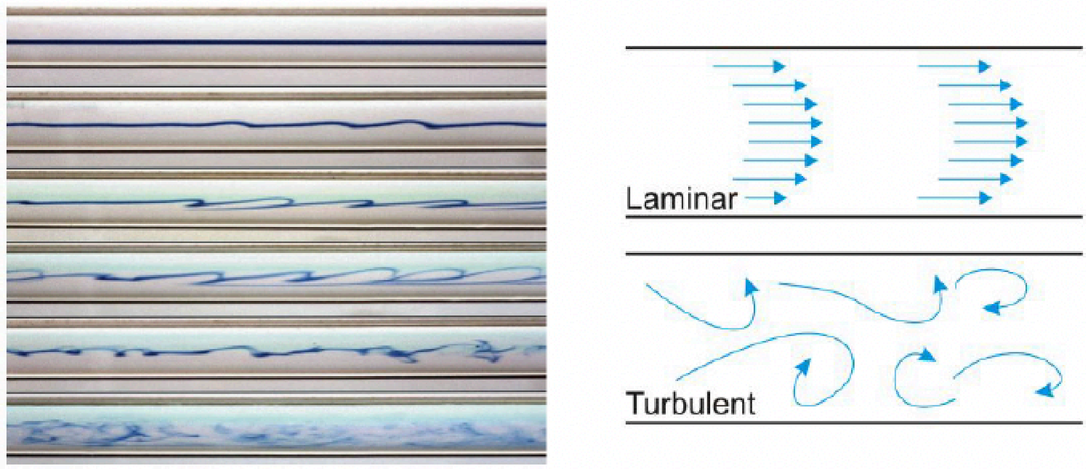
PROBLÈME I

Ecoulement sanguin

On étudie expérimentalement l'écoulement d'un fluide (ici de l'eau) dans une conduite cylindrique horizontale. La conduite est transparente, et pour y visualiser l'écoulement, on y injecte continûment de l'encre au centre de sa section d'entrée.



(a) Écoulements avec des vitesses de plus en plus importantes (de haut en bas).

(b) Écoulements laminaire et turbulent.

- A faible vitesse, on constate que l'encre forme un filet droit : on dit que l'écoulement du fluide est laminaire.
- En augmentant la vitesse, la forme du filet d'encre devient chaotique : on dit que l'écoulement devient turbulent.

La vitesse v_{lim} au-delà de laquelle l'écoulement dans un tube passe de laminaire à turbulent est fonction du diamètre d de la conduite, ainsi que de la masse volumique ρ et de la viscosité η du fluide.

I.1) L'unité de la viscosité est le Pa.s dans le système international. En déduire sa dimension.

I.2) En déduire qu'une expression valable pour la vitesse limite est :

$$v_{\text{lim}} = k\frac{\eta}{d\rho}$$

avec k une constante sans dimension.

On réalise une expérience avec de l'eau (masse volumique $1{,}00 \times 10^3\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ et viscosité $1{,}0 \times 10^{-3}\,\text{Pa}\cdot\text{s}$). En utilisant un tube de $1{,}0\,\text{cm}$ de diamètre, on constate que l'écoulement devient turbulent dès que la vitesse dépasse $23\,\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$.

I.3) En déduire la valeur de la constante k.

On s'intéresse maintenant à la circulation sanguine dans le corps humain. Le sang a quasiment la même masse volumique que l'eau, mais sa viscosité est 6 fois plus importante.

I.4) Dans l'aorte, de diamètre $2{,}0\,\text{cm}$, le sang circule à une vitesse de $33\,\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$. L'écoulement sanguin est-il laminaire ou turbulent ?

Lorsque le diamètre d'une artère se réduit (par dépôt de cholestérol par exemple), la vitesse du sang dans la portion touchée augmente. Par conservation du débit sanguin dans l'artère, on peut démontrer que si, dans la portion touchée, la surface de l'artère est divisée par un certain facteur, alors la vitesse du sang dans cette portion se trouve quant à elle multipliée par le même facteur.

I.5) Un dépôt de cholestérol s'installe sur une partie de l'aorte saine étudiée à la question précédente, réduisant ainsi son diamètre. Ce phénomène peut-il changer la nature de l'écoulement sanguin ? Si oui, à partir de quel diamètre artériel la nature de l'écoulement va-t-elle être affectée ?

PROBLÈME II

Volant de badminton

Le badminton est un sport dans lequel les joueurs frappent un projectile, appelé volant, à l'aide d'une raquette. Le but de ce problème est de proposer une modélisation simplifiée de la trajectoire du volant, assimilé à un point matériel, sous l'effet conjugué de la pesanteur et de la résistance de l'air, et de confronter le modèle aux résultats d'une expérience. On négligera la poussée d'Archimède dans tout le problème.

On lance depuis le sol le volant de masse m avec une vitesse initiale $U_0 = 58\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, dans une direction faisant un angle $\theta_0 = 52°$ avec le plan du sol, supposé horizontal.

La figure ci-dessous donne la chronophotographie du mouvement observé. Elle fait apparaître une vitesse limite $U_\infty = 6{,}7\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. L'intensité de la pesanteur vaut $g = 9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

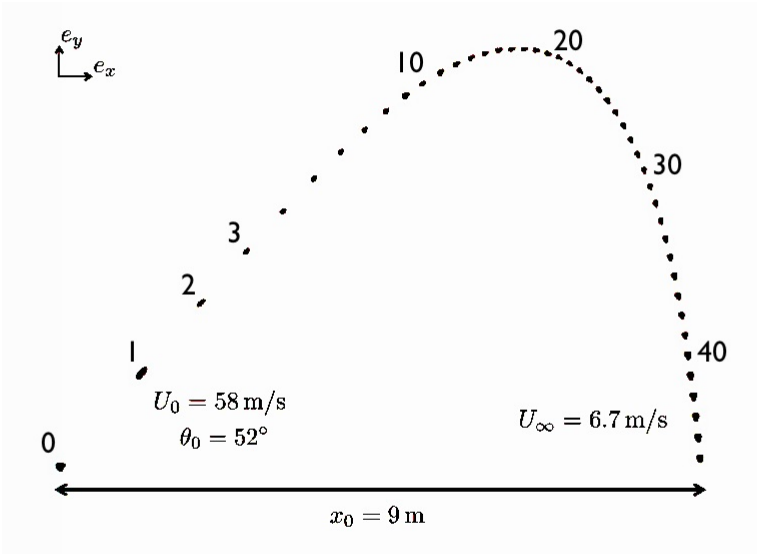


Figure 1 – Positions successives d'un volant de badminton allant de la gauche vers la droite, enregistrées toutes les 50 ms. Le premier point, repéré par le chiffre 0, correspond au lancer à $t = 0$.

On néglige dans un premier temps la force de freinage exercée par l'air.

II.1) Déterminer l'équation de la trajectoire. Quelle est sa nature ? Dessiner son allure.

II.2) Déterminer la portée L_0 (distance horizontale à laquelle le volant retombe sur le sol) en fonction de U_0, de θ_0, et de l'accélération de la pesanteur g. Commenter la valeur numérique obtenue.

On tient maintenant compte du freinage de l'air, modélisé par une force opposée à la direction du mouvement et de norme $F = \frac{1}{2}\rho S C_x U^2$ où ρ est la masse volumique de l'air, S la surface de référence du volant, C_x le coefficient de traînée et U la norme de la vitesse du volant.

Pour simplifier l'étude du problème, on modélise la trajectoire du volant en distinguant trois régimes successifs :

1. régime durant lequel le poids est négligeable devant la force de freinage de l'air ;
2. régime intermédiaire ;
3. régime durant lequel l'accélération du volant est négligeable.

II.3) On s'intéresse au dernier régime. Quelle est la nature du mouvement dans ce régime ? Exprimer la vitesse limite du volant U_∞ en fonction des paramètres du problème.

II.4) À quelle condition sur U/U_∞ peut-on négliger le poids par rapport à la force de freinage de l'air ? On suppose cette condition satisfaite dans le premier régime.

II.5) Quelle est la nature de la trajectoire dans le premier régime ? Établir l'équation différentielle vérifiée par la norme de la vitesse U dans ce régime, en faisant intervenir g et U_∞.

II.6) Vérifier que la solution de cette équation, en prenant en compte la condition initiale, a pour expression :

$$U(t) = \frac{U_0}{1 + \frac{gU_0}{U_\infty^2}t}$$

II.7) Déterminer l'expression de la distance parcourue au temps t.

II.8) On suppose que le premier régime se termine lorsque la norme de la vitesse prend sa valeur limite U_∞. En déduire l'instant t_1 auquel se termine le premier régime. Calculer la distance parcourue par le volant à cet instant.

II.9) En quelle position sur la chronophotographie se trouve le volant à l'instant t_1 ? Quelle distance réelle a-t-il parcouru à cet instant ? Comparer avec la modélisation et commenter.

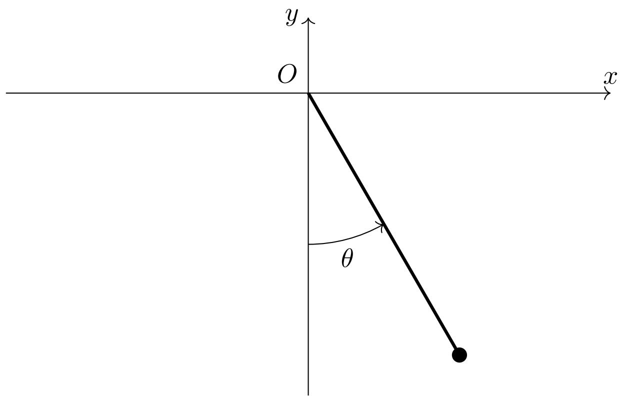
II.10) Dans le deuxième régime, les forces sont du même ordre de grandeur. La durée de ce régime dépend principalement de g et U_∞. Par analyse dimensionnelle, proposer une expression de la durée t_2 de ce régime.

II.11) Quelle est la position atteinte par le volant à l'instant $t_1 + t_2$ sur la chronophotographie ? Peut-on considérer le troisième régime atteint expérimentalement à cet instant ?

PROBLÈME III

Rupture du fil d'un pendule

On étudie un pendule simple, constitué d'un point matériel M de masse m suspendu au bout d'un fil sans masse et inextensible de longueur L. On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On note g l'accélération de la pesanteur. On repère la position du pendule par un angle θ par rapport à la verticale. On néglige ici tout frottement.



On écarte le pendule de sa position d'équilibre verticale d'un angle θ_0, et on le lâche sans vitesse initiale.

III.1) Déterminer l'équation différentielle portant sur $\theta(t)$. On détaillera soigneusement la démarche.

III.2) Le pendule ayant été lâché avec un angle $\theta_0 \ll \frac{\pi}{2}$, déterminer la période des oscillations et l'équation horaire $\theta(t)$.

III.3) On lâche dans un second temps le pendule depuis la position horizontale $\theta_0 = -\frac{\pi}{2}$. En utilisant l'équation du mouvement obtenue à la question III.1), montrer qu'à tout instant :

$$\dot{\theta}^2 = 2\frac{g}{L}\cos(\theta)$$

III.4) Le fil casse lorsque $\theta = -\frac{\pi}{4}$. En déduire la tension de rupture du fil en fonction de m et g. Est-il cohérent que le fil ait pu supporter la masse à l'équilibre ?

III.5) Donner les composantes, dans le repère cartésien $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ indiqué sur le schéma, du vecteur position et du vecteur vitesse au moment de la rupture du fil.

III.6) Que peut-on dire du mouvement après rupture du fil ? Déterminer la hauteur du point d'accroche du pendule pour que le point matériel atteigne le sol exactement à la verticale de celui-ci.