

DS 2, Durée 2h, Calculatrices interdites.

Exercice 1

Résoudre pour $t \in \mathbb{R}$, l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} y'(t) + y(t) = 1 + e^{2t} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Exercice 2

Résoudre pour $t \in \mathbb{R}$, les équations différentielles suivantes (on donnera les solutions générales réelles) :

$$y''(t) + 2y' + 2y(t) = \cos(t)$$

$$y''(t) + 4y(t) = \sin(2t)$$

Exercice 3

On considère la fonction définie par :

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

1. Montrer que f est définie, dérivable et impaire sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer, pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ ou $\tan(f(x))$ (*au choix*) et en déduire une expression simplifiée de f .

Exercice 4

On rappelle la formule de trigonométrie : si $0 < a < \pi/2$ et $0 < b < \pi/2$ alors :

$$\tan(a-b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$$

1. Montrer que si $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\arctan\left(\frac{1}{k^2 + k + 1}\right) = \arctan\left(\frac{1}{k}\right) - \arctan\left(\frac{1}{k+1}\right)$$

2. En déduire la limite (pour $n \rightarrow +\infty$) de la suite :

$$u_n = \sum_{k=0}^n \arctan\left(\frac{1}{k^2 + k + 1}\right)$$

3. En remarquant que, si $k \in \mathbb{N}^*$: $\frac{2}{k^2} = \frac{(k+1)-(k-1)}{1+(k+1)(k-1)}$, calculer la limite (pour $n \rightarrow +\infty$) de la suite :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \arctan\left(\frac{2}{k^2}\right)$$

Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\arctan(2x) + \arctan(x) = \frac{\pi}{4}$$

Exercice 6

On considère le problème (P) suivant :

Trouver les couples de fonctions réelles f et g définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} f^2(x) - g^2(x) = 1 \\ f(x) = g'(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1. Montrer que si f et g sont solutions de (P) alors f et g sont solutions de l'équation différentielle $y'' = y$.
2. En déduire les solutions de (E) .