Sup MPSI, Lycée Jean Perrin.

DS 2, Durée 2h, Calculatrices interdites.

Exercice 1

Résoudre pour $t \in \mathbb{R}$, l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} y'(t) + y(t) = 1 + e^{2t} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

On obtient :

$$y(t) = 1 + e^{2t}/3 - 1/3e^{-t}$$

Exercice 2

Résoudre pour $t \in \mathbb{R}$, les équations différentielles suivantes (on donnera les solutions générales) :

$$y''(t) + 2y' + 2y(t) = \cos(t)$$

$$y(t) = \exp(-t)(\lambda \sin(t) + \mu \cos(t)) + \frac{\cos(t) + 2\sin(t)}{5}$$

$$y''(t) + 4y(t) = \sin(2t)$$

$$y(t) = \lambda \sin(2t) + \mu \cos(2t) - \frac{t\cos(2t)}{4}$$

Exercice 3

On considère la fonction définie par :

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

1. f est définie, dérivable et impaire sur $\mathbb{R}$ car si $x \in \mathbb{R}$:
$$-1 < \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} < 1$$
2. On obtient $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ou $\tan(f(x)) = x$ et
$$f(x) = \arctan(x)$$

Exercice 4

On rappelle la formule de trigonométrie : si $0 < a < \pi/2$ et $0 < b < \pi/2$ alors :

$$\tan(a-b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$$

1. On a : si $k \in \mathbb{N}^*$:
$$\arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) = \arctan\left(\frac{1}{k}\right) - \arctan\left(\frac{1}{k+1}\right)$$
car (en appliquant tan...) :
$$\frac{1}{k^2+k+1} = \frac{\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}}{1 + \frac{1}{k}\frac{1}{k+1}}$$
2. On a pour $n \to \infty$:
$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) = \arctan(1) + \arctan(1) - \arctan\left(\frac{1}{n+1}\right) \to \pi/2$$
3.
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{2}{k^2}\right) = \sum_{k=1}^{n} (\arctan(k+1) - \arctan(k-1))$$
$$= \arctan(n+1) + \arctan(n) - \arctan(1) - \arctan(0) \to 3\pi/4$$

Exercice 5

$x = \arctan(\frac{\sqrt{17}-3}{4})$

Exercice 6

On considère le problème (P) suivant :

Trouver 2 fonctions réelles f et g définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\begin{cases} f^2(x) - g^2(x) = 1 \\ f(x) = g'(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1. Si f et g sont solutions de (P) alors par dérivation de la première relation : $2ff' = 2gg' = 2fg$. Or f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ ainsi : $f' = g$ et donc $f'' = f$, $g'' = g$.
Avec $f(0) = 1$ et $f'(0) = g(0) = 0$ on a alors $f = \cosh$ et $g = \sinh$.
2. La vérification fonctionne et donc la seule solution du problème posé est : $f = \cosh$ et $g = \sinh$.