

DM 2, Pour le 12-11-2025, une copie pour 2 élèves.

Exercice 1

On cherche à résoudre le problème : trouver les fonctions f 2 fois dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que, pour tout $x > 0$:

$$(E) : x^2 f''(x) - 2f(x) = x$$

Pour cela, on pose pour $t \in \mathbb{R}$: $g(t) = f(\exp(t))$.

Pour la suite, on pourra noter $x = \exp(t)$

1. Montrer que si f est une solution de (E) alors la fonction g vérifie, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$g''(t) - g'(t) - 2g(t) = \exp(t)$$

2. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E) .

Exercice 2

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \arctan \left(\sqrt{\frac{1-x}{x}} \right)$$

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f .
2. Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(\arccos(\sqrt{x}))$$

3. Déterminer les limites de f en 0 et en 1.
4. Montrer que pour $x \in D_f$:

$$f(x) = \arccos(\sqrt{x})$$

5. Représenter le graphique de la fonction f .
6. Montrer que pour tout $x \in]0, 1]$: $f(x) = \frac{1}{2} \arccos(2x - 1)$.
7. Retrouver les résultats précédents géométriquement.