

PROBLÈME I

Le diiode en solution aqueuse

Partie A. Élément iode

La structure électronique de l'état fondamental d'un atome d'iode est $[\text{Kr}]5s^24d^{10}5p^6$.

I.1) Indiquer la position de l'iode dans le tableau périodique des éléments (ligne, colonne). À quelle famille appartient-il ?

I.2) Le diiode I_2 est peu soluble dans l'eau mais se dissout facilement en présence d'ions iodure pour donner l'ion triiodure, I_3^- . Donner la structure de Lewis de l'ion triiodure. Quelle est sa géométrie ?

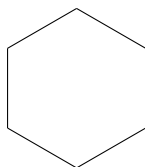
I.3) Justifier la grande solubilité de l'ion triiodure par rapport au diiode dans l'eau.

Partie B. Extraction du diiode

À un volume $V = 10,00 \text{ mL}$ de cyclohexane est ajouté $1,00 \text{ L}$ d'une solution aqueuse de diiode de concentration molaire $1,00 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. Le cyclohexane est un solvant organique non miscible à l'eau. Les volumes des deux phases ne varient pas lors du mélange.

Après agitation et séparation des deux phases, on dose la phase organique, sous vive agitation, par une solution de thiosulfate de sodium ($\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_3$) de concentration molaire $1,00 \times 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. À l'équivalence $9,50 \text{ mL}$ de solution de thiosulfate de sodium ont été ajoutés.

La réaction support du titrage (considérée comme totale) a pour équation : $\text{I}_2(\text{aq}) + 2 \text{S}_2\text{O}_3^{2-}(\text{aq}) = 2 \text{I}^-(\text{aq}) + \text{S}_4\text{O}_6^{2-}(\text{aq})$.



I.4) Le cyclohexane a la formule topologique ci-contre :

Justifier que ce solvant n'est pas miscible avec l'eau et que le diiode y est très soluble.

I.5) Pourquoi est-il nécessaire d'agiter fortement lors du dosage ?

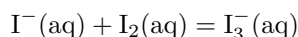
I.6) Déterminer la quantité de matière de diiode titrée (présente dans la phase organique après extraction).

I.7) Déterminer le coefficient de partage K_P du diiode défini par : $K_P = \frac{[\text{I}_2]_C}{[\text{I}_2]_E}$ où $[\text{I}_2]_C$ est la concentration molaire du diiode dans le cyclohexane et $[\text{I}_2]_E$ la concentration molaire du diiode dans l'eau.

Commenter la valeur trouvée.

Partie C. Réaction de formation de l'ion triiodure

Dans $1,00 \text{ L}$ d'une solution aqueuse d'iodure de potassium, (K^+ , I^-), de concentration molaire $4,50 \times 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, un peu de diiode solide est dissous sans variation de volume. Il s'établit alors un équilibre pour la réaction d'équation :



Après ajout de cyclohexane, agitation et séparation des deux phases, des dosages séparés de ces deux phases par une solution de thiosulfate de sodium de concentration molaire $1,00 \times 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ sont effectués :

- le dosage de $10,00 \text{ mL}$ de la phase aqueuse conduit à un volume équivalent de $40,20 \text{ mL}$ de solution de thiosulfate de sodium.
- le dosage de $10,00 \text{ mL}$ de la phase organique conduit à un volume équivalent de $14,40 \text{ mL}$ de solution de thiosulfate de sodium.

I.8) Dédurre de ces résultats la valeur de la constante d'équilibre K° de la réaction de formation de l'ion triiodure.

Indication : lors du dosage de la phase aqueuse, le triiodure est retransformé en diiode pour réagir avec les ions thiosulfate, le dosage concerne ainsi l'ensemble du diiode et des ions triiodure présents initialement.

PROBLÈME II

Oscillateur mécanique (d'après Mines PSI 2025)

On considère un ressort de masse nulle, de raideur k , de longueur à vide ℓ_0 et de longueur $\ell(t)$ à un instant t quelconque. Ce ressort est suspendu verticalement à un point O fixe d'un support immobile dans le référentiel galiléen d'étude $\mathcal{R} = (O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. À son autre extrémité est accroché un point matériel P de masse m .

Dans tout le problème, le ressort reste dans son domaine élastique de fonctionnement associé à une force de rappel proportionnelle à son allongement. Le champ de pesanteur $\vec{g}$ est uniforme égal à $\vec{g} = g \vec{u}_z$ avec $g > 0$. On néglige toute forme de frottement.

Partie A. Mouvement vertical

On suppose que le mouvement du point matériel P reste vertical, c'est-à-dire sur la droite $(O, \vec{u}_z)$ (cf figure 1).

II.1) Établir l'expression de l'énergie potentielle élastique $\mathcal{E}_{p,k}$ du ressort dont on prendra l'origine lorsque la longueur du ressort est égale à sa longueur à vide. On exprimera $\mathcal{E}_{p,k}$ en fonction de k , ℓ_0 et ℓ .

II.2) Établir, en fonction de m , g et ℓ , l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur $\mathcal{E}_{p,p}$ du point matériel P dont on prendra l'origine en O .

II.3) En déduire l'expression de l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ du point matériel P de masse m dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ en fonction notamment de $\ell(t)$.

II.4) Établir l'équation différentielle du mouvement du point matériel P vérifiée par $\ell(t)$ dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$.

II.5) Résoudre l'équation différentielle obtenue à la question précédente en supposant qu'à $t = 0$, le point matériel P est lâché sans vitesse initiale de la position $\ell(t = 0) = L > 0$. On fera apparaître une pulsation ω_0 .

Quelle condition doit-on imposer à L pour que le point matériel P ne heurte pas le support fixe où est suspendu le ressort ? On exprimera cette condition en fonction de k , ℓ_0 , m et g .

Qualifier le mouvement observé : tracer l'allure de $\ell(t)$ en fonction de t .

Donner l'expression de la période T_0 du mouvement du point matériel P et calculer sa valeur numérique pour $k = 2,96 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ et $m = 300 \text{ g}$.

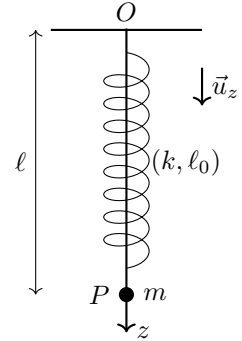


FIGURE 1 – Oscillateur vertical

Partie B. Glissière horizontale

Le point matériel P de masse m est maintenant astreint à se déplacer, sans frottement, horizontalement sur une glissière parfaite qui se confond avec la droite $(O', \vec{u}_x)$ (cf figure 2). Le ressort précédent est toujours accroché au point O fixe dans le référentiel galiléen d'étude $\mathcal{R}$ et par son autre extrémité au point matériel P .

On se place maintenant dans le système de coordonnées cartésiennes $(O', \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ d'origine O' telle que la droite $(O, \vec{u}_z)$ soit perpendiculaire à la droite $(O', \vec{u}_x)$: le point matériel P est ainsi repéré par son abscisse x sur la droite $(O', \vec{u}_x)$. On note ℓ_c la distance OO' .

II.6) Établir l'expression de l'énergie potentielle $\mathcal{E}_{p,P}$ du point matériel P en fonction de k , ℓ_0 , ℓ_c et x en prenant l'origine de l'énergie potentielle de pesanteur en O' et celle de l'énergie potentielle élastique du ressort pour $\ell = \ell_0$.

II.7) En fonction du paramètre ℓ_c , discuter des positions d'équilibre du point P et de leur stabilité respective : on exprimera les abscisses d'équilibre x_e associées en fonction des données et on donnera les allures correspondantes de $\mathcal{E}_{p,P}$ en fonction de x en précisant les valeurs remarquables.

II.8) Dans quel cas peut-on parler de barrière de potentiel ? Préciser sa hauteur U_b en fonction des données.

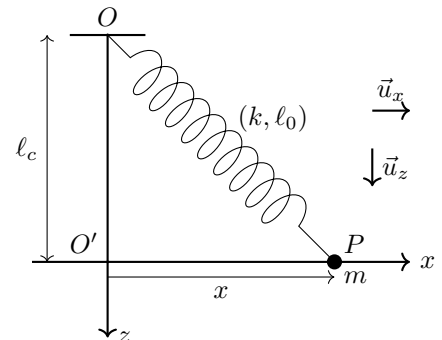


FIGURE 2 – Oscillateur horizontal

II.9) Établir l'équation différentielle du mouvement du point matériel P vérifiée par $x(t)$ dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$.
Que représente physiquement $\frac{d\mathcal{E}_{p,P}}{dx}(x)$ en termes de force ?

II.10) Transformer l'équation différentielle du mouvement en 2 équations différentielles d'ordre 1 en variables $u_0(t) = x(t)$ et $u_1(t) = \dot{x}(t)$.

On résout ces équations numériquement à l'aide de l'algorithme d'Euler. En introduisant les estimations $u_{0,n}$ de $u_0(t)$ et $u_{1,n}$ de $u_1(t)$ aux instants $t_n = n\Delta t$ pour $n \in \mathbb{N}$ où Δt désigne le pas de discrétisation temporelle, former les deux relations exprimant $u_{0,n+1}$ et $u_{1,n+1}$ en fonction de $u_{0,n}$ et $u_{1,n}$.

Quelles valeurs doit-on donner pour $n = 0$ à $u_{0,n}$ et $u_{1,n}$?

Pour $k = 2,96 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$, $m = 300 \text{ g}$, $\ell_0 = 1,00 \text{ m}$ et $\ell_c = 0,200 \text{ m}$, on effectue la résolution numérique de l'équation différentielle du mouvement pour déterminer $x(t)$ et $\dot{x}(t)$ en fonction de t pour deux conditions initiales A et B différentes. Les résultats sont présentés sur la figure 3.

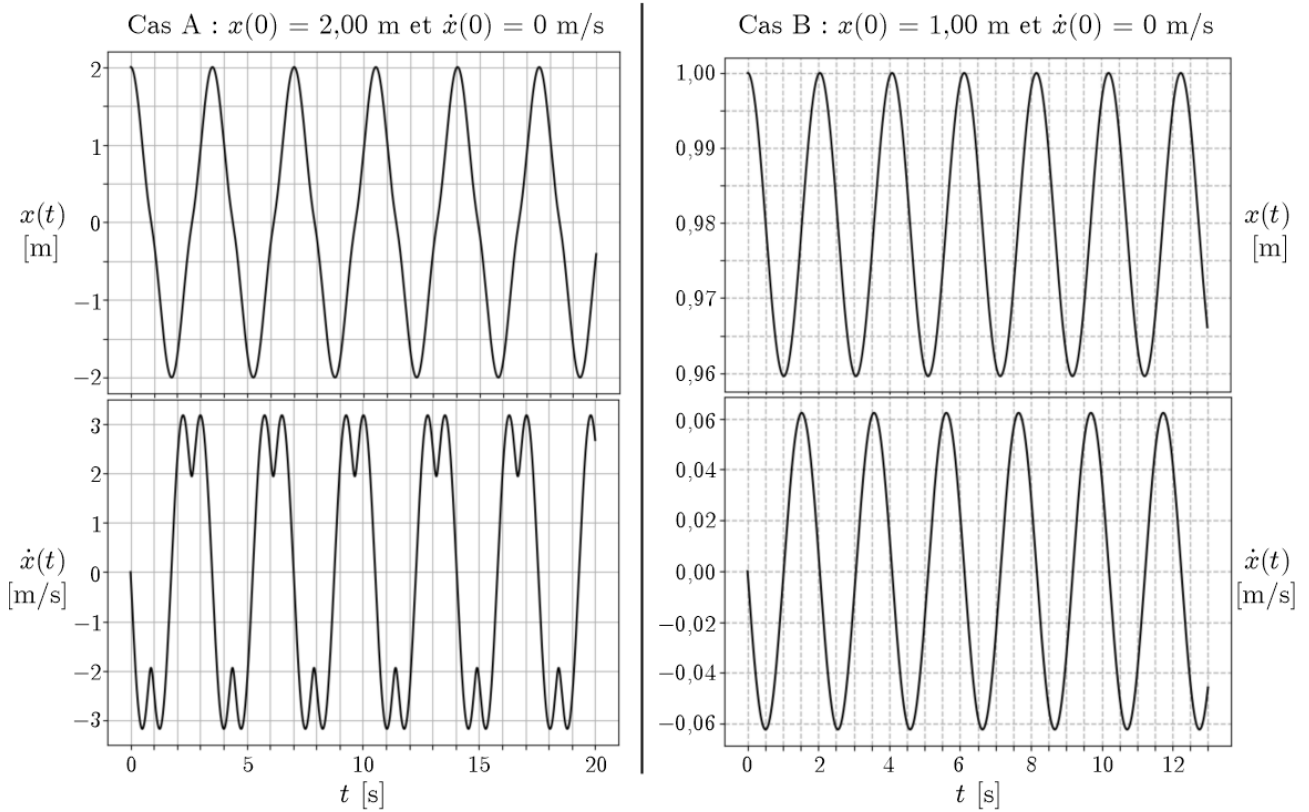


FIGURE 3 – Solutions numériques pour deux conditions initiales distinctes

II.11) Comparer le plus précisément possible la nature du mouvement dans les deux cas.

II.12) Dans le cas B, établir une expression approchée de la valeur moyenne $\langle x(t) \rangle$ des oscillations (en fonction de ℓ_c et ℓ_0) et de leur période T_2 en fonction de T_0 , ℓ_c et ℓ_0 .

Effectuer les applications numériques et comparer les résultats aux valeurs lues sur la figure 3. Conclure sur les approximations effectuées.

II.13) Les 2 cas A et B correspondent à deux types de mouvements différents du point P . Dans le cas où les conditions initiales sont du type $x(t=0) = X_0 > 0$ et $\dot{x}(t=0) = 0$, établir la condition que doit vérifier X_0 pour que l'on soit dans le cas A.

PROBLÈME I

Le diiode en solution aqueuse

Partie A. Élément iode

I.1) On a commencé à remplir la couche $n = 5$, l'iode se trouve donc sur la cinquième ligne. Il a 5 électrons dans la sous-couche 5p, il se trouve donc sur la cinquième colonne du bloc p, c'est-à-dire la dix-septième colonne du tableau périodique. Il appartient à la famille des halogènes.

I.2) L'iode a 7 électrons sur sa couche de valence, ceux des sous-couches 5s et 5p.

L'ion triiodure possède $3 \times 7 + 1 = 22$ électrons de valence qui se répartissent sur 11 doublets : $\text{I} \text{---} \text{I} \text{---} \text{I}$

L'atome central a une géométrie coudée, les doublets non-liants repoussant les doublets liants qui ne restent donc pas alignés.

I.3) L'eau est un solvant polaire qui dissout bien les ions comme l'ion triiodure, mais peu les molécules non-polaires comme le diiode.

Partie B. Extraction du diiode

I.4) Le cyclohexane est apolaire car les liaisons C-C ne sont pas polarisées et la polarisation globale due aux liaisons C-H s'annule. Il n'est donc pas miscible avec l'eau mais le diiode y est soluble (les semblables dissolvent les semblables).

I.5) La réaction se fait dans la phase aqueuse, or le diiode se trouve principalement en phase organique. L'agitation permet de mettre en contact les réactifs.

I.6) À l'équivalence, les réactifs sont en proportions stœchiométriques : $n_C(\text{I}_2) = \frac{1}{2} n(\text{S}_2\text{O}_3^{2-}) = \frac{cV_E}{2} = 4,75 \times 10^{-4} \text{ mol}$.

I.7) Il y avait initialement dans l'eau une quantité $n_{E0}(\text{I}_2) = 1,00 \times 10^{-3} \text{ mol}$, après extraction il en reste donc $n_E(\text{I}_2) = n_{E0}(\text{I}_2) - n_C(\text{I}_2) = 5,25 \times 10^{-4} \text{ mol}$ ce qui représente une concentration $[\text{I}_2]_E = 5,25 \times 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

Dans le cyclohexane, la concentration à l'équilibre était $[\text{I}_2]_C = \frac{n_C(\text{I}_2)}{V} = 4,75 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

Le coefficient de partage vaut donc $K_P = \frac{[\text{I}_2]_C}{[\text{I}_2]_E} = 90,5$.

On constate en effet que l'équilibre est largement en faveur du cyclohexane, ce qui confirme la meilleure solubilité du diiode dans le cyclohexane.

Partie C. Réaction de formation de l'ion triiodure

I.8) Dans la phase organique, la concentration de diiode est obtenue de la même manière que précédemment : $[\text{I}_2]_C = \frac{cV_E}{2V} = 7,20 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. On en déduit qu'à l'équilibre $[\text{I}_2]_E = \frac{[\text{I}_2]_C}{K_P} = 7,96 \times 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

Dans la phase aqueuse, la concentration totale (diiode + diiode transformé en triiodure) vaut $[\text{I}_2]_E + [\text{I}_3^-]_E = \frac{cV_E}{2V} = 2,01 \times 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. On en déduit $[\text{I}_3^-]_E = 2,00 \times 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

Ces ions sont issus de la réaction avec les ions iodure, dont la concentration a donc baissé : $[\text{I}^-]_E = [\text{I}^-]_0 - [\text{I}_3^-]_E = 2,50 \times 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

D'après la loi d'action de masse, la constante d'équilibre a pour expression $K^\circ = \frac{[\text{I}_3^-]_E}{[\text{I}^-]_E [\text{I}_2]_E}$ et vaut $K^\circ = 1,01 \times 10^3$.

PROBLÈME II

Oscillateur mécanique

Partie A. Mouvement vertical

II.1) La force de rappel élastique subie par la masse est donnée par $\vec{F} = -k(\ell - \ell_0) \vec{u}_z$. Lorsque le ressort s'allonge de $d\ell$, le travail de cette force est donné par $\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot d\ell \vec{u}_z = -k(\ell - \ell_0) d\ell$.

L'énergie potentielle élastique est telle que $\delta W(\vec{F}) = -d\mathcal{E}_{p,k}$ d'où $\frac{d\mathcal{E}_{p,k}}{d\ell} = k(\ell - \ell_0)$. On en déduit une primitive sous la forme $\mathcal{E}_{p,k} = \frac{1}{2}k\ell^2 - k\ell_0\ell + \text{cste}$.

On fixe la constante avec la condition que l'énergie potentielle s'annule lorsque $\ell = \ell_0$: $\text{cste} = \frac{1}{2}k\ell_0^2$.

En conclusion, $\mathcal{E}_{p,k} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$.

II.2) On procède de même avec $\vec{P} = -mg \vec{u}_z$: $\delta W(\vec{P}) = \vec{P} \cdot d\ell \vec{u}_z = mg d\ell = -d\mathcal{E}_{p,p}$ soit $\frac{d\mathcal{E}_{p,p}}{d\ell} = -mg$. On a alors $\mathcal{E}_{p,p} = -mg\ell + \text{cste}$.

L'énergie potentielle de pesanteur s'annule par convention lorsque le point P est en O , c'est-à-dire pour $\ell = 0$ donc $\text{cste} = 0$.

En conclusion, $\mathcal{E}_{p,p} = -mg\ell$.

II.3) La position du point P est $\vec{OP} = \ell \vec{u}_z$. Sa vitesse est donc $\vec{v} = \dot{\ell} \vec{u}_z$.

L'énergie cinétique de P est $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\vec{v} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}m\dot{\ell}^2$.

L'énergie mécanique a donc pour expression $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_{p,k} + \mathcal{E}_{p,p} = \frac{1}{2}m\dot{\ell}^2 + \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 - mg\ell$.

II.4) Dans le référentiel $\mathcal{R}$ supposé galiléen, le point matériel P subit le poids et la force de rappel du ressort qui sont conservatives puisqu'elles dérivent d'énergies potentielles. D'après le théorème de l'énergie mécanique, l'énergie mécanique se conserve au cours du mouvement, soit $\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = 0$.

Il vient :

$$m\ddot{\ell}\ell + k(\ell - \ell_0)\dot{\ell} - mg\dot{\ell} = 0 \Leftrightarrow \ddot{\ell} + \frac{k}{m}\ell = \frac{k}{m}\left(\ell_0 + \frac{mg}{k}\right)$$

II.5) C'est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

La solution générale de l'équation homogène est $\ell_H(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$ et une solution particulière est la solution constante $\ell_P = \ell_0 + \frac{mg}{k}$. La solution générale de l'équation différentielle est donc :

$$\ell(t) = \ell_0 + \frac{mg}{k} + A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

On fixe les constantes A et B à l'aide des conditions initiales : $\ell(0) = L$ et $\dot{\ell}(0) = 0$. Il vient $\ell_0 + \frac{mg}{k} + A = L$ soit $A = L - \ell_0 - \frac{mg}{k}$ et $B = 0$.

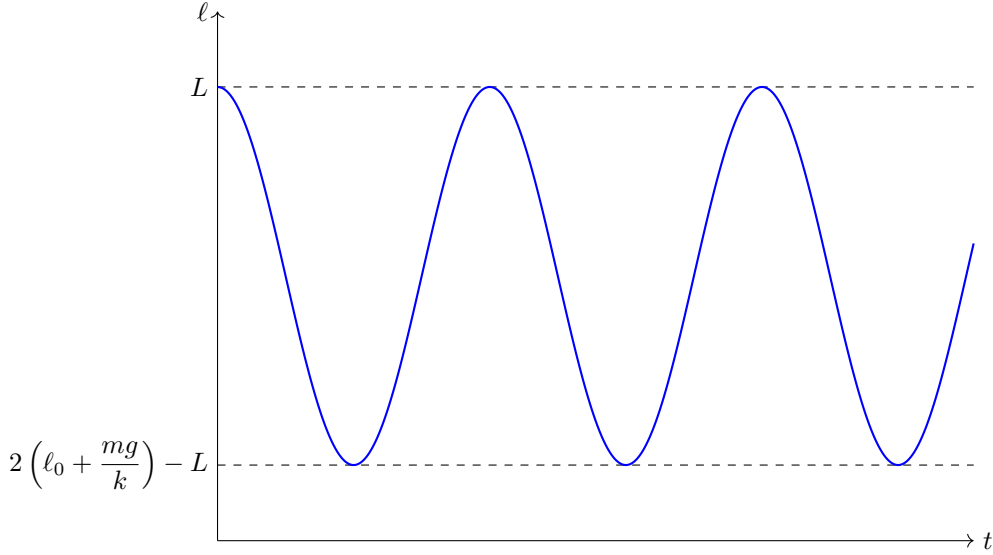
Pour conclure, la solution est : $\ell(t) = \ell_0 + \frac{mg}{k} + \left(L - \ell_0 - \frac{mg}{k}\right) \cos(\omega_0 t)$.

Le mouvement est sinusoïdal de période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2,00 \text{ s}$.

L'amplitude des oscillations couvre l'intervalle $\left[\ell_0 + \frac{mg}{k} - \left(L - \ell_0 - \frac{mg}{k}\right); \ell_0 + \frac{mg}{k} + \left(L - \ell_0 - \frac{mg}{k}\right)\right]$ c'est-à-dire $\left[2\left(\ell_0 + \frac{mg}{k}\right) - L; L\right]$.

Afin que le point P n'atteigne jamais le support, il faut que $\ell(t)$ reste positif donc que la borne inférieure de l'intervalle soit positive :

$$L < 2\left(\ell_0 + \frac{mg}{k}\right)$$



Partie B. Glissière horizontale

II.6) L'énergie potentielle de pesanteur est nulle. L'énergie potentielle élastique est $\mathcal{E}_{p,k} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$ où $\ell = \sqrt{\ell_c^2 + x^2}$ en utilisant le théorème de Pythagore.

Pour conclure, $\boxed{\mathcal{E}_{p,P} = \frac{1}{2}k \left(\sqrt{\ell_c^2 + x^2} - \ell_0 \right)^2}$.

II.7) Les positions d'équilibre sont données par les extrema de l'énergie potentielle. Calculons donc sa dérivée par rapport à x :

$$\frac{d\mathcal{E}_{p,P}}{dx} = k \left(\sqrt{\ell_c^2 + x^2} - \ell_0 \right) \times \frac{x}{\sqrt{\ell_c^2 + x^2}} = kx \left(1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{\ell_c^2 + x^2}} \right)$$

On obtient les 3 positions d'équilibre suivantes :

$$\boxed{x_e = \begin{cases} x_0 & = 0 \\ x_{\pm} & = \pm \sqrt{\ell_0^2 - \ell_c^2} \end{cases}}$$

$x_{\pm}$ n'existent que si $\ell_0 > \ell_c$.

Pour étudier leur stabilité, on calcule la dérivée seconde de l'énergie potentielle :

$$\frac{d^2\mathcal{E}_{p,P}}{dx^2} = k \left(1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{\ell_c^2 + x^2}} \right) + kx \times \frac{\ell_0 x}{(\ell_c^2 + x^2)^{3/2}}$$

Pour $x_e = x_0 = 0$, $\frac{d^2\mathcal{E}_{p,P}}{dx^2}(x_0) = k \left(1 - \frac{\ell_0}{\ell_c} \right)$. Cette position est stable ssi $\frac{d^2\mathcal{E}_{p,P}}{dx^2}(x_0) > 0$ c'est-à-dire lorsque $\boxed{\ell_0 < \ell_c}$ ce qui correspond à la situation où c'est la seule position d'équilibre. Elle est instable lorsque les positions d'équilibre $x_{\pm}$ existent.

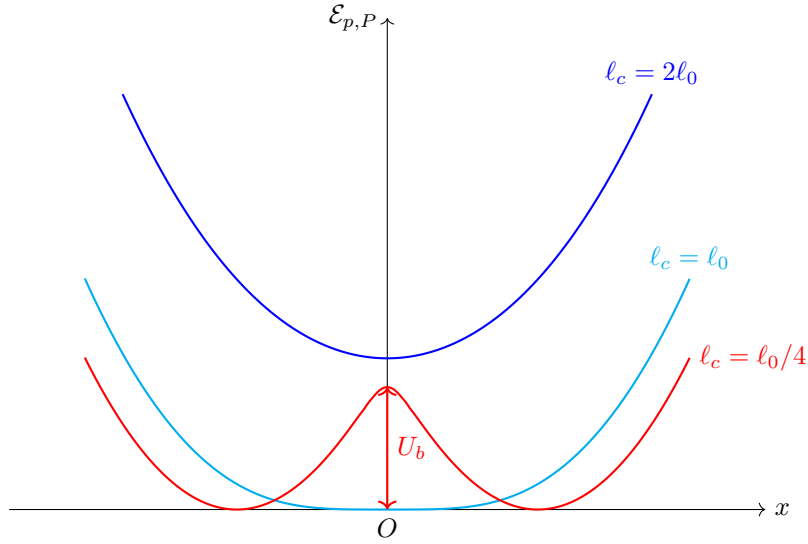
Pour $x_e = x_{\pm}$, $\frac{d^2\mathcal{E}_{p,P}}{dx^2}(x_{\pm}) = \frac{kx_{\pm}^2}{\ell_0^2} > 0$. Ces positions d'équilibre sont donc stables, quand elles existent.

Pour conclure (voir figure suivante) :

- si $\ell_0 < \ell_c$, il y a une unique position d'équilibre stable en $x_e = 0$ où l'énergie potentielle vaut $\mathcal{E}_{p,P}(0) = \frac{1}{2}k(\ell_c - \ell_0)^2$;
- si $\ell_0 > \ell_c$, il y a trois positions d'équilibre, $x_e = 0$ est instable et $x_e = \pm \sqrt{\ell_0^2 - \ell_c^2}$ qui sont stables avec une énergie potentielle $\mathcal{E}_{p,P}(x_{\pm}) = 0$.

II.8) Dans le cas $\ell_0 > \ell_c$, il y a une barrière de potentiel à franchir pour passer d'une position d'équilibre à l'autre.

Sa hauteur est l'écart $\boxed{U_b = \mathcal{E}_{p,P}(0) - \mathcal{E}_{p,P}(x_{\pm}) = \frac{1}{2}k(\ell_c - \ell_0)^2}$.



II.9) L'énergie mécanique est $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_{p,P}$ avec l'énergie cinétique qui vaut ici $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$.

Outre le poids et la force de rappel du ressort, qui sont conservatives, le point matériel est soumis à la réaction de glissière, qui est normale en l'absence de frottements : elle ne travaille pas donc l'énergie mécanique se conserve.

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = 0 \Leftrightarrow m\ddot{x}\dot{x} + \frac{d\mathcal{E}_{p,P}}{dx}\dot{x} = 0 \Leftrightarrow m\ddot{x} = -\frac{d\mathcal{E}_{p,P}}{dx} = -kx \left(1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{\ell_c^2 + x^2}} \right)$$

Le membre de gauche est la composante de $m\vec{a}$ sur $\vec{u}_x$. D'après la loi deuxième loi de Newton, le membre de droite est la composante de la résultante des forces sur $\vec{u}_x$. Ainsi $\frac{d\mathcal{E}_{p,P}}{dx}$ est l'opposée de la force exercée dans la direction $\vec{u}_x$ (ici c'est le projeté sur $\vec{u}_x$ de la force de rappel du ressort).

II.10) En posant $u_0(t) = x(t)$ et $u_1(t) = \dot{x}(t)$, on a :

$$\begin{cases} \dot{u}_0(t) &= \dot{x}(t) = u_1(t) \\ \dot{u}_1(t) &= \ddot{x} = -\frac{kx}{m} \left(1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{\ell_c^2 + x^2}} \right) \end{cases}$$

En faisant l'approximation d'Euler :

$$\begin{cases} \dot{u}_0(t_n) &\simeq \frac{u_{0,n+1} - u_{0,n}}{\Delta t} \\ \dot{u}_1(t_n) &\simeq \frac{u_{1,n+1} - u_{1,n}}{\Delta t} \end{cases}$$

on obtient ici :

$$\begin{cases} u_{0,n+1} &= u_{0,n} + \Delta t \times u_{1,n} \\ u_{1,n+1} &= u_{1,n} - \Delta t \times \frac{kx}{m} \left(1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{\ell_c^2 + x^2}} \right) \end{cases}$$

Les conditions initiales sont $u_{0,0} = x(0)$ et $u_{1,0} = \dot{x}(0)$.

II.11) On se trouve dans le cas $\ell_0 > \ell_c$ avec 3 positions d'équilibre.

- dans le cas A, on observe des oscillations périodiques non sinusoïdales d'amplitude 2 m et de période 3,5 s, autour de 0 ;
- dans le cas B, on observe des oscillations quasi-sinusoïdales d'amplitude 2 cm et de période 2 s, centrées sur 98 cm.

II.12) Dans le cas B, on est dans le cadre de l'approximation harmonique du mouvement autour d'une position d'équilibre stable. La valeur moyenne est la position d'équilibre :

$$\langle x(t) \rangle = x_+ = \sqrt{\ell_0^2 - \ell_c^2} = 0,98 \text{ m},$$

valeur qui coïncide avec celle lue sur le graphe.

Pour obtenir la période, on écrit l'équation différentielle sous forme linéarisée autour de la position d'équilibre. Pour ce faire on utilise le développement de Taylor-Lagrange. En posant $\varepsilon = x - x_+$, on a :

$$\mathcal{E}_{p,P}(x) \simeq \mathcal{E}_{p,P}(x_+) + \frac{d\mathcal{E}_{p,P}}{dx}(x_+) \varepsilon + \frac{1}{2} \frac{d^2\mathcal{E}_{p,P}}{dx^2}(x_+) \varepsilon^2 = \frac{1}{2} k \frac{\ell_0^2 - \ell_c^2}{\ell_0^2} \varepsilon^2$$

L'équation différentielle obtenue à la question II.9) devient $m\ddot{\varepsilon} = -k \frac{\ell_0^2 - \ell_c^2}{\ell_0^2} \varepsilon$ que l'on met sous la forme :

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{k}{m} \times \frac{\ell_0^2 - \ell_c^2}{\ell_0^2} \varepsilon = 0$$

C'est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m} \times \frac{\ell_0^2 - \ell_c^2}{\ell_0^2}}$ donc de période propre :

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k} \times \frac{\ell_0^2}{\ell_0^2 - \ell_c^2}} = T_0 \frac{\ell_0}{\sqrt{\ell_0^2 - \ell_c^2}} = 1,02 T_0 = 2,04 \text{ s},$$

valeur qui coïncide avec la valeur mesurée sur le graphe aux incertitudes de lecture près.

Cet accord montre que l'approximation harmonique effectuée est très bonne.

II.13) Le cas A correspond à un mouvement qui visite les deux puits de potentiel en franchissant la barrière en $x = 0$. Il faut pour ce faire que l'énergie mécanique soit supérieure à la barrière de potentiel U_b .

Initialement $x(0) = X_0$ et $\dot{x}(0) = 0$ donc $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} k \left(\sqrt{\ell_c^2 + X_0^2} - \ell_0 \right)^2$.

La condition nécessaire s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_m > U_b &\Leftrightarrow \frac{1}{2} k \left(\sqrt{\ell_c^2 + X_0^2} - \ell_0 \right)^2 > \frac{1}{2} k (\ell_c - \ell_0)^2 \\ &\Leftrightarrow \ell_c^2 + X_0^2 + \ell_0^2 - 2\ell_0 \sqrt{\ell_c^2 + X_0^2} > \ell_c^2 + \ell_0^2 - 2\ell_0 \ell_c \quad \text{en développant} \\ &\Leftrightarrow X_0^2 + 2\ell_0 \ell_c > 2\ell_0 \sqrt{\ell_c^2 + X_0^2} \\ &\Leftrightarrow X_0^4 + 4\ell_0^2 \ell_c^2 + 4X_0^2 \ell_0 \ell_c > 4\ell_0^2 \ell_c^2 + 4\ell_0^2 X_0^2 \quad \text{en passant au carré} \\ &\Leftrightarrow X_0^2 > 4\ell_0^2 - 4\ell_0 \ell_c \quad \text{après simplification} \\ &\Leftrightarrow \boxed{X_0 > 2\sqrt{\ell_0(\ell_0 - \ell_c)}} \end{aligned}$$