Chapitre P6

Circuits linéaires du premier ordre

Notions et contenus	Capacités exigibles
Dipôles : condensateurs, bobines.	Utiliser les relations entre l'intensité et la tension. Citer des ordres de grandeurs de L et C. Exprimer l'énergie stockée dans un condensateur ou une bobine.
Régime libre, réponse à un échelon de tension.	Distinguer, sur un relevé expérimental, régime transitoire et régime permanent au cours de l'évolution d'un système du premier ordre soumis à un échelon de tension. Interpréter et utiliser la continuité de la tension aux bornes d'un condensateur ou de l'intensité du courant traversant une bobine. Établir l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par une grandeur électrique dans un circuit comportant une ou deux mailles. Déterminer la réponse temporelle dans le cas d'un régime libre ou d'un échelon de tension. Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire. *Capacité expérimentale : réaliser l'acquisition d'un régime transitoire pour un circuit linéaire du premier ordre et analyser ses caractéristiques. Confronter les résultats expérimentaux aux expressions théoriques.* *Capacité numérique : mettre en uvre la méthode d'Euler à l'aide d'un langage de programmation pour simuler la réponse d'un système linéaire du premier ordre à une excitation de forme quelconque.*
Stockage et dissipation d'énergie.	Réaliser un bilan énergétique.

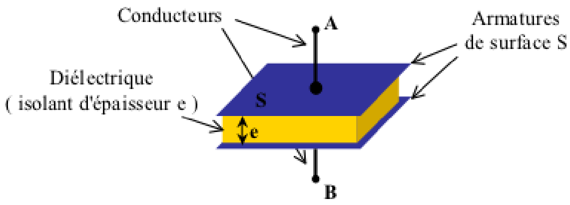
Questions de cours

- Donner la relation entre l'intensité et la tension pour un condensateur ou une bobine. Citer des ordres de grandeur pour C ou L.
- Indiquer les dipôles équivalents à un condensateur ou une bobine en régime stationnaire.
- Donner l'expression de l'énergie stockée dans un condensateur ou une bobine. Justifier à l'aide de la puissance reçue.
- Interpréter la continuité de la tension aux bornes d'un condensateur ou de l'intensité du courant traversant une bobine.
- Établir l'équation différentielle gouvernant la charge ou la décharge d'un condensateur à travers une résistance. La résoudre en identifiant la constante de temps et tracer le graphe associé.
- Réaliser le bilan énergétique de la charge du condensateur.

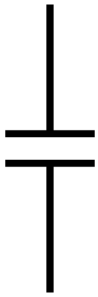
Document 1. Condensateur

Exemples

Composition



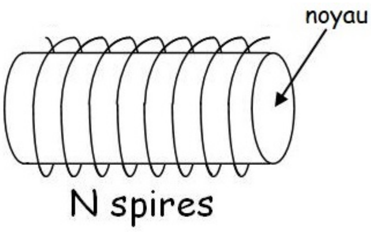
Symbole



Document 2. Bobine

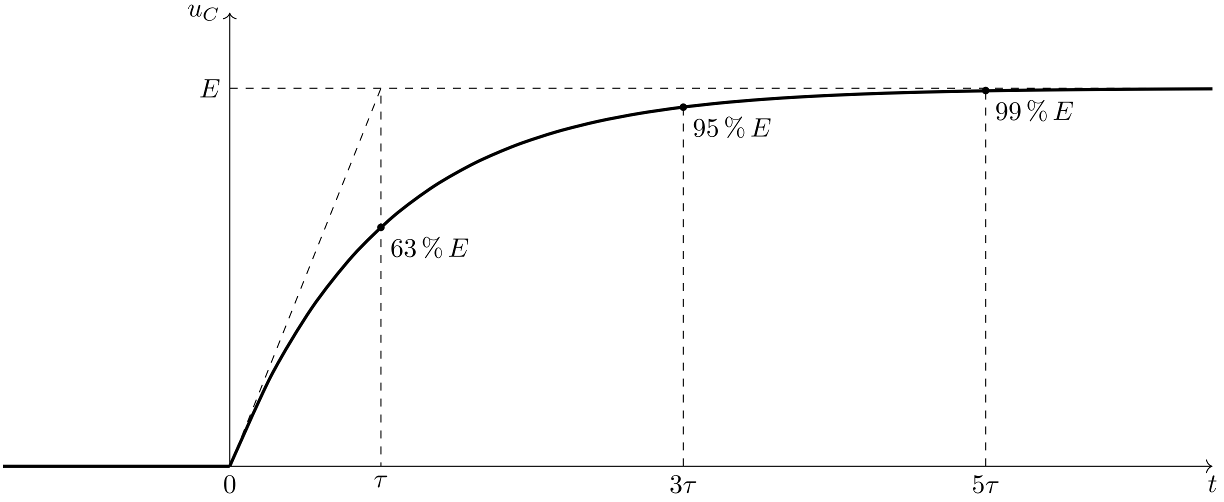
Exemples

Composition

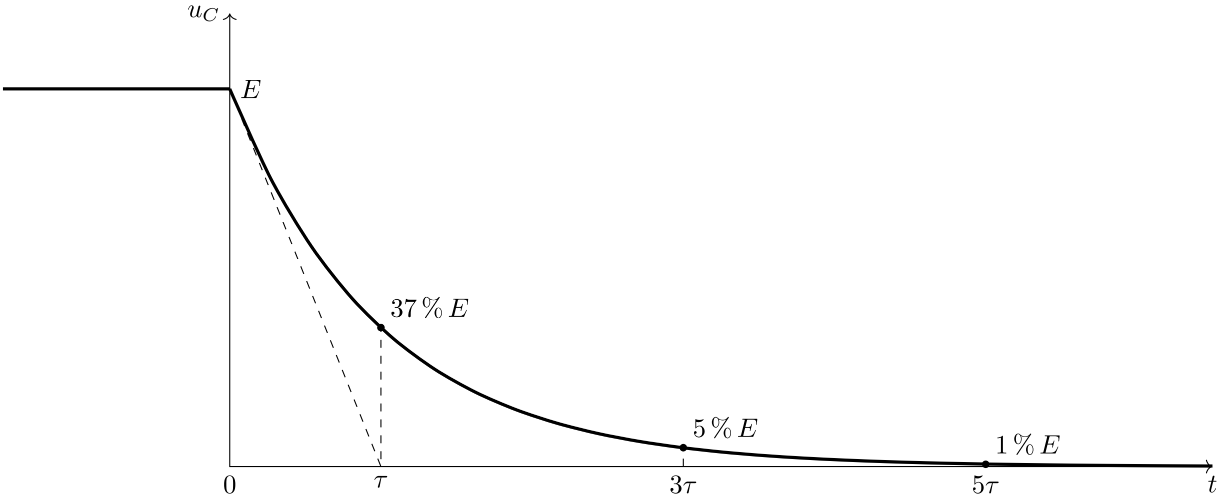


Symbole

Document 3. Evolution temporelle lors de la charge du condensateur

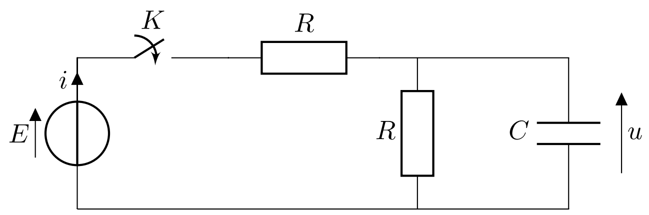


Document 4. Evolution temporelle lors de la décharge du condensateur



Exercice de cours A. Conditions initiale et régime permanent

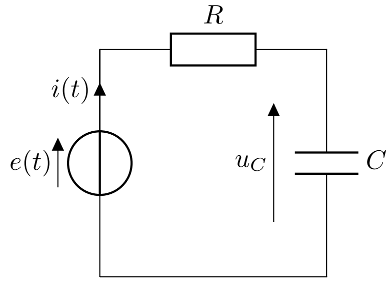
On considère le circuit ci-contre. Le condensateur est initialement déchargé. À $t = 0$, on ferme l'interrupteur.



1. Juste après la fermeture, que devient la tension u aux bornes du condensateur ? En déduire l'intensité i du courant débité par le générateur à $t = 0^+$.
2. Que deviennent ces grandeurs dans le régime stationnaire atteint au bout d'une durée tendant vers l'infini ?

Exercice de cours B. Charge d'un condensateur

On considère le circuit ci-contre, où le générateur exerce un échelon de tension :



$$\begin{cases} e(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ e(t) = E & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

Le condensateur est déchargé pour $t < 0$.

1. Donner les valeurs de la tension u_C et du courant i pour $t < 0$. Faire de même après un temps très long.
2. Établir l'équation différentielle vérifiée par u_C pour $t \geqslant 0$. Identifier la constante de temps, notée τ.
3. Donner la solution générale de cette équation différentielle.
4. Que vaut la tension initiale $u_C(t = 0^+)$? Justifier.
5. En déduire $u_C(t)$ pour $t \geqslant 0$.
6. Exprimer alors $i(t)$ pour $t \geqslant 0$.

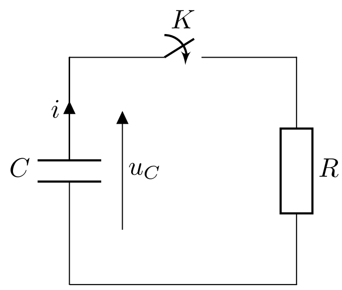
Exercice de cours C. Bilan énergétique

On poursuit l'exercice précédent.

1. Déterminer l'énergie totale fournie par le générateur.
2. Déterminer la variation d'énergie stockée dans le condensateur.
3. Déterminer l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance.
4. Vérifier la conservation de l'énergie.
5. Retrouver ce résultat en multipliant par $i(t)$ l'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$, et en identifiant les différents termes.

Exercice de cours D. Décharge d'un condensateur

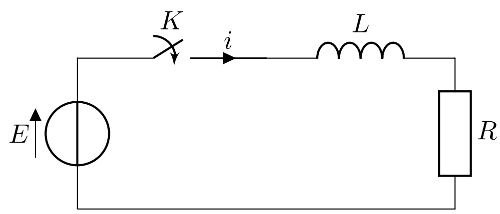
Soit un condensateur chargé à la tension E. On le place dans le circuit ci-dessous. On ferme l'interrupteur à l'instant pris comme originie des dates $t = 0$.



1. Que devient la tension u_C à l'instant $t = 0^+$? Et l'intensité i ?
2. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la tension u_C aux bornes du condensateur pour $t > 0$.
3. Résoudre l'équation différentielle et représenter l'évolution temporelle de u_C et de l'intensité i du courant circulant dans le circuit.
4. Faire le bilan énergétique de la décharge du condensateur.

Exercice de cours E. Établissement du courant dans une bobine

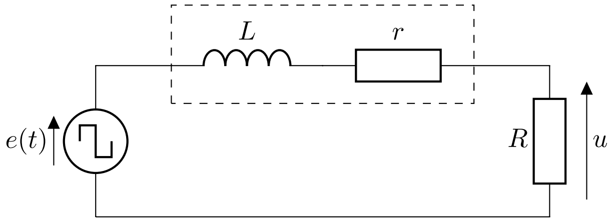
Soit le circuit série ci-contre, constitué d'une source idéale de tension E, d'une inductance L et d'une résistance R est série. À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur.



1. Établir l'équation différentielle vérifiée par l'intensité $i(t)$ du courant dans le circuit pour $t > 0$. Identifier une constante de temps.
2. Résoudre cette équation différentielle en prenant en compte la doncition initiale.
3. Le régime permanent étant établi, on ouvre l'interrupteur subitement. Que devient la tension aux bornes des différents dipôles ? Commenter.

Exercice 1. Caractéristiques d'une bobine réelle (★★)

Soit une bobine réelle modélisée par une bobine idéale d'inductance L en série avec une résistance interne r. On place cette bobine en série avec une résistance $R = 40{,}0\,\Omega$ et on alimente l'ensemble avec un GBF produisant une tension rectangulaire.

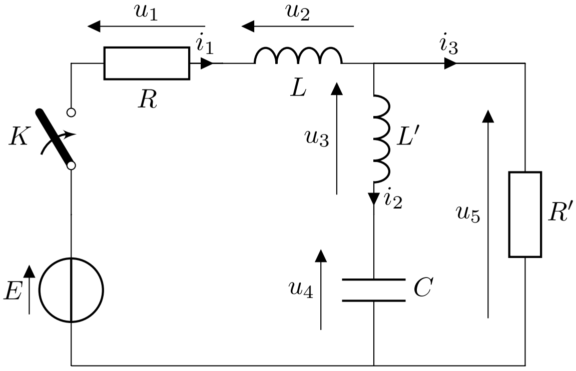


On mesure à l'aide d'un oscilloscope (voir oscillogramme ci-dessous) les tensions $e(t)$ aux bornes du GBF (en rouge) et $u(t)$ aux bornes de la résistance (en bleu). Les échelles sont de 1 ms par division horizontalement et 1 V par division verticalement.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ en fonction de $e(t)$ et des différents paramètres du circuit.
2. Résoudre cette équation dans le cas où $e(t)$ impose un échelon $(0, E)$ comme observé sur l'oscillogramme.
3. Exploiter l'oscillogramme pour déterminer les valeurs numériques de L et r.
4. Afin d'atteindre à chaque échelon le régime permanent, quelle contrainte s'impose à la fréquence du GBF ? Proposer une valeur numérique.

Exercice 2. Conditions initiales et régime permanent (★★)

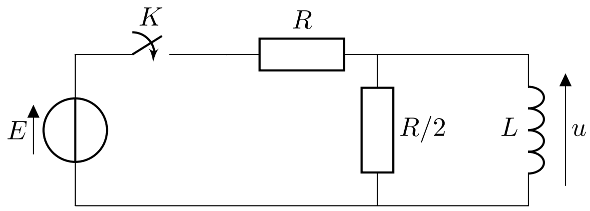
On considère le circuit ci-dessous. Initialement l'interrupteur est ouvert.



1. Donner les valeurs des tensions et des courants fléchés sur le schéma en régime stationnaire avec l'interrupteur ouvert.
2. Que deviennent leurs valeurs juste après la fermeture de l'interrupteur K ?
3. Déterminer leur valeur une fois le nouveau régime permanent atteint, qui est supposé stationnaire.

Exercice 3. Circuit à deux mailles avec bobine (★★)

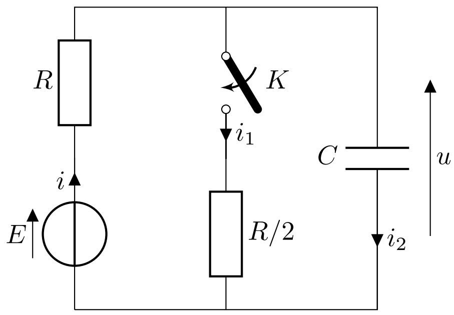
Dans le circuit ci-dessous, on ferme à l'instant $t = 0$ l'interrupteur K qui était ouvert depuis très longtemps.



1. Déterminer la valeur de la tension u juste après la fermeture de l'interrupteur ($t = 0^+$).
2. Que vaut cette tension lorsque $t \to \infty$?
3. Etablir l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$.
4. En déduire l'expression de $u(t)$ et tracer son allure.

Exercice 4. Circuit à deux mailles avec condensateur (★★)

Soit le circuit ci-dessous. A l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K qui était ouvert depuis longtemps.



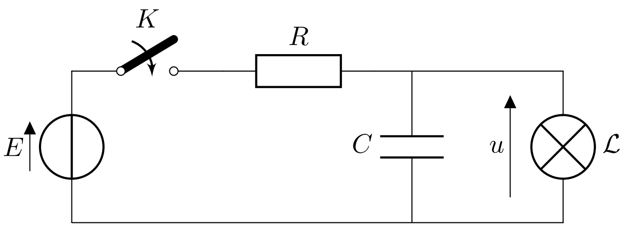
1. Préciser les valeurs de i, i_1, i_2 et u à l'instant $t = 0^-$, juste avant la fermeture de l'interrupteur K.
2. Même question à l'instant $t = 0^+$.
3. Même question quand t tend vers l'infini.
4. Obtenir l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ pour $t > 0$.
5. La résoudre puis tracer l'allure de $u(t)$.

Exercice 5. Tube fluorescent (★★)

Du point de vue électrique, un tube fluorescent est un dipôle de résistance infinie (interrupteur ouvert) lorsqu'il est éteint et de faible résistance r quand il est allumé. Il s'allume quand la tension à ses bornes devient supérieure à la tension d'allumage E_a. Elle s'éteint quand la tension à ses bornes devient inférieure à la tension d'extinction E_e.

On place un tube fluorescent $(\mathcal{L})$ dans le circuit de la figure suivante. Le condensateur étant déchargé, on ferme l'interrupteur K à un instant donné.

Données pour les applications numériques : $r = 10\,\Omega$; $E_a = 80\,\text{V}$; $E_e = 30\,\text{V}$; $E = 100\,\text{V}$; $R = 1{,}0\,\text{k}\Omega$; $C = 0{,}60\,\mu\text{F}$.



1. Si le tube reste éteint, quelle valeur atteint la tension u en régime permanent ? Justifier que le tube s'allume avant.

La résistance r étant faible, lorsque le tube est allumé le condensateur se décharge très rapidement dans le tube, jusqu'à ce qu'il s'éteigne. Dans cette phase, on peut négliger le courant circulant dans la branche du générateur devant celui circulant dans la lampe. Soit $t = 0$ l'instant où cette phase commence.

2. Déterminer l'évolution de u. En déduire la durée de cette phase d'allumage.

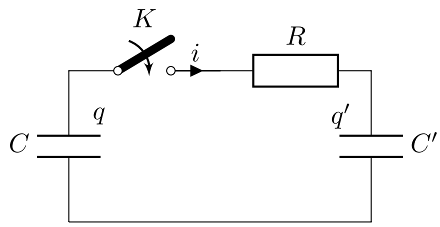
3. On suppose que toute l'énergie dissipée par effet Joule est convertie en lumière. Calculer l'énergie lumineuse émise par le tube pendant cette phase.
4. Une fois le tube éteint, le condensateur se recharge. Déterminer l'évolution de u et en déduire la durée de cette phase d'extinction.

Les cycles d'éclairage et d'extinction se succèdent ensuite de façon périodique.

5. Représenter qualitativement le graphe de u sur quelques périodes.
6. Calculer la valeur de la période.
7. En déduire la puissance lumineuse moyenne émise par le tube fluorescent.

Exercice 6. Transfert de charge (★★★)

On étudie le circuit ci-dessous. Initialement, les armatures supérieures des condensateurs de capacité C et C' portent les charges Q_0 et Q'_0 respectivement. À $t = 0$, on ferme l'interrupteur.



1. Déterminer sans calcul l'état final du système.
2. Établir l'équation différentielle vérifiée par l'intensité $i(t)$. Résoudre cette équation différentielle et en déduire l'évolution temporelle des charges de chacun des condensateurs. Retrouver le résultat précédent.
3. Déterminer de façon directe E_J, l'énergie dissipée par effet Joule.
4. Retrouver le résultat avec un simple bilan énergétique.

Réponses

Exercice 1 : 2. $u(t) = \dfrac{ER}{R+r}\left(1 - e^{-(R+r)t/L}\right)$; 3. $L = 80\,\mathrm{mH}$; $r = 10\,\Omega$; 4. $f < 62{,}5\,\mathrm{Hz}$.

Exercice 2 : tout est nul sauf $u_2(0^+) = E$; $i_{1\infty} = i_{3\infty} = \dfrac{E}{R+R'}$; $u_{1\infty} = \dfrac{ER}{R+R'}$; $u_{4\infty} = u_{5\infty} = \dfrac{ER'}{R+R'}$.

Exercice 3 : 1. $u(0) = E/3$; 2. $u(\infty) = 0$; 4. $u(t) = \dfrac{E}{3}\exp\left(-\dfrac{R}{3L}t\right)$.

Exercice 4 : 2. $u(0^+) = E$; $i_1(0^+) = 2E/R$; $i_2(0^+) = -2E/R$; 5. $u(t) = \dfrac{E}{3}\left(2\exp\left(-\dfrac{3}{RC}t\right)) + 1\right)$.

Exercice 5 : 1. $u_\infty = E$; 2. $t_1 = rC\ln(E_a/E_e)$; 3. $\mathcal{E}_C = 1{,}7\,\mathrm{mJ}$; 4. $t_2 = rC\ln\left(\dfrac{E-E_e}{E-E_a}\right)$; 6. $T = 0{,}75\,\mathrm{ms}$; 7. $\mathcal{P}_{\mathrm{moy}} = 2{,}2\,\mathrm{W}$.

Exercice 6 : 1. $u_\infty = \dfrac{Q_0 + Q'_0}{C + C'}$; 2. $q(t) = Cu_\infty + Ae^{-t/\tau}$ et $q'(t) = C'u_\infty - Ae^{-t/\tau}$ avec $\tau = \dfrac{RCC'}{C+C'}$, $A = \dfrac{Q_0C' - Q'_0C}{C+C'}$; 3. $E_J = \dfrac{(Q_0C' - Q'_0C)^2}{2CC'(C+C')}$.