

PROBLÈME I

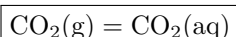
Bulles de champagne

Partie A. Formation des bulles

I.1) Représentation de Lewis : <O=C=O>

La répulsion des doublets d'électrons de valence donne une **géométrie linéaire** à cette molécule, et donc parfaitement symétrique. Elle est par conséquent **apolaire** et devrait **peu se dissoudre** dans l'eau qui est un solvant polaire.

I.2) Par définition $k_H = \frac{[\text{CO}_2]}{P_{\text{CO}_2}}$ à l'équilibre. Aux grandeurs standards près, c'est le rapport des activités de l'espèce dissoute et de l'espèce gazeuse, qui est le quotient réactionnel de la réaction :



D'après la loi d'action de masse, on a en effet $K^\circ = Q_{eq} = \frac{a(\text{CO}_2(\text{aq}))_{eq}}{a(\text{CO}_2(\text{g}))_{eq}} = \frac{[\text{CO}_2]_{eq} \times P^\circ}{P_{\text{CO}_2,eq} \times C^\circ} = k_H \frac{P^\circ}{C^\circ}$.

I.3) D'après la loi de Henry :

$$P_{\text{CO}_2} = \frac{[\text{CO}_2]}{k_H} = \frac{m}{M_{\text{CO}_2} V k_0 \exp\left(\frac{\alpha}{T}\right)} = 6 \text{ bar}$$

En utilisant la loi des gaz parfaits, la masse de CO_2 dans la phase gazeuse est :

$$m_{\text{gaz}} = n_{\text{gaz}} M_{\text{CO}_2} = \frac{M_{\text{CO}_2} P_{\text{CO}_2} v}{RT} = 0,3 \text{ g}$$

ce qui représente 3 % de la masse totale. Ce n'est pas totalement négligeable, mais ne modifie pas le résultat donné avec un chiffre significatif. On peut donc le négliger et considérer que tout le dioxyde de carbone est resté sous forme dissoute.

Note : on aura fait attention aux unités, avec la pression en Pa et le volume en m^3 .

I.4) Si la concentration molaire est constante, et que la température augmente, cela implique que k_H diminue, et donc la **pression augmente avec la température**. Un rapide calcul montre que passer de 10 à 30 °C augmente la pression de CO_2 de 6 à 11 bar. Ceci peut provoquer l'éjection prématuré du bouchon voire casser le verre de la bouteille.

I.5) Lorsque la bouteille est ouverte, la pression du dioxyde de carbone gazeux chute brutalement de 6 bar à 1 bar. Ainsi le quotient réactionnel augmente brutalement et l'équilibre est rompu. Pour revenir à l'équilibre, le quotient réactionnel doit diminuer : **la réaction se produit spontanément dans le sens inverse**, c'est-à-dire celui de la formation de gaz : c'est pourquoi les bulles apparaissent *a priori*.

I.6) Les forces de cohésion intermoléculaires dans l'eau sont les **interactions de van der Waals** (de type Keesom) entre les molécules d'eau qui sont polaires, ainsi que les **liaisons hydrogène** car l'eau est un solvant protique.

Partie B. Montée des bulles

I.7) La norme du poids de la bulle est $P = mg = \rho_{\text{CO}_2} V g$. La masse volumique est obtenue à l'aide de la loi des gaz parfaits :

$$\rho_{\text{CO}_2} = \frac{m_{\text{CO}_2}}{V} = \frac{n_{\text{CO}_2}}{M_{\text{CO}_2} V} = \frac{P_{\text{CO}_2}}{M_{\text{CO}_2} R T} = 1,78 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

D'autre part la poussée d'Archimède a pour norme $\Pi = \rho_{\text{liq}} V g$. Ainsi

$$\frac{P}{\Pi} = \frac{\rho_{\text{CO}_2}}{\rho_{\text{liq}}} = 1,78 \times 10^{-3}$$

ce qui justifie bien que le **poids de la bulle est négligeable devant la poussée d'Archimède** et explique l'ascension de la bulle dans un verre de champagne.

I.8) Lors de son ascension, le système {bulle} est alors soumis à l'action :

- de la poussée d'Archimède $\vec{\Pi} = -\rho_{\text{liq}} \frac{4}{3} \pi r^3 \vec{g}$;
- de la force de Stokes opposée au mouvement $\vec{f} = -6\pi\eta r \vec{v}$.

D'après la deuxième loi de Newton appliquée à la bulle dans le référentiel lié au verre supposé galiléen, $m\vec{a} = \vec{\Pi} + \vec{f}$ où $m = \rho_{\text{CO}_2} \times \frac{4}{3} \pi r^3$. Il vient alors :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{9\eta}{2r^2\rho_{\text{CO}_2}}\vec{v} = -\frac{\rho_{\text{liq}}}{\rho_{\text{CO}_2}}\vec{g}$$

C'est la forme proposée, où l'on identifie : $\tau = \frac{2r^2\rho_{\text{CO}_2}}{9\eta}$ et $\vec{v}_{\text{lim}} = -\frac{2r^2\rho_{\text{liq}}}{9\eta}\vec{g}$.

I.9) τ est la constante de temps de cette équation différentielle du premier ordre, elle représente la durée caractéristique du régime transitoire.

Numériquement, $\tau = 3,0 \times 10^{-4} \text{ s}$, temps relativement faible devant le temps de montée d'une bulle (de l'ordre de la seconde) : on peut donc approximer que la **vitesse de la bulle est quasiment égale à la vitesse limite durant toute la montée**.

I.10) La durée écoulée entre deux images successives est $\Delta t = 1/f_b$. Pour estimer la vitesse à la position n , on calcule la vitesse moyenne entre les positions $(n-1)$ et $(n+1)$: $v_n \simeq \frac{h_{n+1} - h_{n-1}}{2/f_b}$.

À l'échelle de la figure, 1 mm est représenté par un segment de 1,7 cm. Or la distance $h_{n+1} - h_{n-1}$ a pour longueur 2,45 cm sur l'image, ce qui représente 1,4 mm en réalité.

On en déduit $v_n = 14 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$.

I.11) D'après la question I.8), la vitesse limite (supposée atteinte immédiatement) est proportionnelle à R^2 soit $U = kR^2$. On prend le logarithme : $\log(U) = \log(k) + 2\log(R)$. C'est une fonction affine de coefficient directeur égal à 2. Le graphe expérimental étant correctement modélisé par une droite, on vérifie la relation affine.

Pour calculer la pente a , on utilise les deux points extrêmes de la droite en pointillés : $a = \frac{\log(6) - \log(0,1)}{\log(300) - \log(40)} = 2,0$ ce qui est conforme à la théorie.

Note : on ne met pas d'unité dans le calcul, car en effectuant une différence de logarithmes, on obtient le logarithme d'un quotient qui est sans unité.

I.12) $\dim(K) = \dim\left(\frac{dn}{S\Delta c}\right) = \frac{\frac{\text{N}}{\text{T}}}{\text{L}^2 \times \text{N} \cdot \text{L}^{-3}} = \text{L} \cdot \text{T}^{-1}$. K a la **dimension d'une vitesse**.

I.13) D'après la loi des gaz parfaits appliqué au dioxyde de carbone dans la bulle, $n = \frac{P_0 \frac{4}{3} \pi r^3}{RT}$ donc $\frac{dn}{dt} = \frac{4\pi r^2 P_0}{RT} \frac{dr}{dt} = K S \Delta c$. Puisque $S = 4\pi r^2$ il vient effectivement $\frac{dr}{dt} = \frac{RT}{P_0} K \Delta c$.

I.14) $\frac{dr}{dt} = \text{cste}$ donc $r(t)$ est une **fonction affine du temps** ce qui est vérifié car le graphe est une droite.

I.15) La pente est $a = \frac{RT}{P_0} K \Delta c$ d'où $\Delta c = \frac{a P_0}{RT K}$.

— série des carrés : graphiquement $a = \frac{(300 - 40)10^{-6}}{1} = 2,6 \times 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ donc $\Delta c = 137 \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3} \simeq 0,14 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$;

— série des ronds : graphiquement $a = \frac{(190 - 30)10^{-6}}{1} = 1,6 \times 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ donc $\Delta c = 84 \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3} \simeq 0,084 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

I.16) On s'attend à ce que Δc diminue au cours du temps, au fur et à mesure de la production de bulles qui diminue la concentration de gaz dans la solution c_L . Par conséquent, la pente de la droite diminue au cours du temps et **celle représentée par des carrés a été mesurée en premier**.

PROBLÈME II

Rebond d'une balle sur le sol

Partie A. Choc élastique

II.1) La seule force exercée sur le point matériel est $\vec{F} = -k(z - \ell_0)\vec{e}_z$. Son mouvement étant vertical, $\vec{a} = \ddot{z}\vec{e}_z$.

On applique la deuxième loi de Newton à ce point matériel dans le référentiel lié au sol qui est supposé galiléen : $M\vec{a} = \vec{F}$.

En projetant sur $\vec{e}_z$, on obtient : $M\ddot{z} = -kz + k\ell_0$ qui se met sous la forme $\ddot{z} + \frac{k}{M}z = \frac{k}{M}\ell_0$.

On identifie avec la formule proposée : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$ et $A = \ell_0$.

II.2) $z(0) = \ell_0$ et $\dot{z} = -v_i$.

II.3) La solution générale de l'équation différentielle est $z(t) = \ell_0 + A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$.

En appliquant la première condition initiale, $z(0) = \ell_0$, il vient $A = 0$.

Alors $\dot{z}(t) = B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$. En appliquant la deuxième condition initiale, $\dot{z} = -v_i$, on obtient $B = -\frac{v_i}{\omega_0}$.

Ainsi la solution est $z(t) = \ell_0 - \frac{v_i}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$.

L'amplitude de compression du ressort est $|B| = \frac{v_i}{\omega_0}$.

II.4) L'instant t_f où la balle quitte le sol est tel que $z(t_f) = \ell_0$ à nouveau. Il faut alors que $\sin(\omega_0 t_f) = 0$ soit $\omega_0 t_f = n\pi$.

L'instant recherché est le premier non-nul : $t_f = \frac{\pi}{\omega_0}$.

$\dot{z}(t_f) = -v_i \cos(\omega_0 t_f) = -v_i \cos(\pi) = v_i$. Ainsi, le vecteur vitesse est $\vec{v} = v_i \vec{e}_z$.

La vitesse de rebond est donc $v_r = v_i$: le coefficient de restitution est $e = 1$, ce qui est attendu pour un choc élastique.

Partie B. Choc inélastique

II.5) On rajoute la force $\vec{F} = -\lambda \dot{z} \vec{e}_z$ dans le bilan des forces exercées. L'équation différentielle obtenue après projection de la deuxième loi de Newton sur $\vec{e}_z$ est : $M\ddot{z} = -\lambda \dot{z} - kz + k\ell_0$ soit :

$$\ddot{z} + \frac{\lambda}{M}\dot{z} + \frac{k}{M}z = \frac{k}{M}\ell_0$$

II.6) C'est une équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants. Le second membre est constant, une solution particulière de l'équation est $z = \ell_0$.

L'équation caractéristique est $x^2 + \frac{\lambda}{M}x + \frac{k}{M} = 0$, dont le discriminant est $\Delta = \left(\frac{\lambda}{M}\right)^2 - 4\frac{k}{M}$ qui est négatif lorsque

$\lambda < 2\sqrt{kM}$. En notant $\Omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{\lambda}{2M}\right)^2}$, on a $\Delta = -4\Omega^2$.

Les racines sont alors complexes : $r_{\pm} = -\frac{\lambda}{2M} \pm i\Omega$. La solution générale de l'équation différentielle est donc :

$$z(t) = \ell_0 + (A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)) \exp\left(-\frac{\lambda}{2M}t\right)$$

ce qui est bien le cas de la solution proposée.

Vérifions les conditions initiales :

- $z(0) = \ell_0$ ce qui est la condition initiale pour l'altitude ;
- $\dot{z} = -\frac{v_i}{\Omega} \left(\Omega \cos(\Omega t) - \frac{\lambda}{2M} \sin(\Omega t) \right) \exp\left(-\frac{\lambda}{2M}t\right)$ d'où $\dot{z}(0) = -v_i$ ce qui est la condition initiale pour la vitesse.

Pour conclure, $z(t) = \ell_0 - \frac{v_i}{\Omega} \sin(\Omega t) \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right)$ est bien la solution de l'équation différentielle avec les conditions initiales du problème.

II.7) La balle quitte le sol à l'instant t_f tel que $z(t_f) = \ell_0$ soit pour $\sin(\Omega t_f) = 0$. On en déduit $t_f = \frac{\pi}{\Omega}$.

À cet instant la vitesse de rebond est :

$$v_r = \dot{z}(t_f) = -\frac{v_i}{\Omega} \times \Omega \cos(\pi) \exp\left(-\frac{\lambda \pi}{2M\Omega}\right) = v_i \exp\left(-\frac{\pi \lambda}{\sqrt{4Mk - \lambda^2}}\right)$$

Le coefficient de restitution vaut donc $e = \frac{v_r}{v_i} = \exp\left(-\frac{\pi \lambda}{\sqrt{4Mk - \lambda^2}}\right)$.

Il est inférieur à 1 ce qui est attendu. De plus il diminue lorsque λ augmente (le numérateur de la fraction augmente et le dénominateur diminue, donc la fraction augmente, donc l'argument de l'exponentielle diminue à cause du signe $-$, donc l'exponentielle diminue car c'est une fonction croissante). Ceci est logique car si λ augmente la dissipation par frottement augmente ce qui réduit l'énergie cinétique récupérable et fait baisser le coefficient de restitution.

Partie C. Rebonds successifs

II.8) L'énergie mécanique a pour expression $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}Mv^2 + Mgz$. Initialement, $v = 0$ et $z = \ell_0 + h_0$ donc $\mathcal{E}_m = Mg(\ell_0 + h_0)$.

À l'arrivée sur le sol, $v = v_i$ et $z = \ell_0$ donc $\mathcal{E}'_m = \frac{1}{2}Mv_i^2 + Mg\ell_0$.

Lors de la chute libre, l'énergie mécanique se conserve : $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}'_m$. On en déduit $v_i = \sqrt{2gh_0}$.

La vitesse de rebond est $v_r = ev_i = e\sqrt{2gh_0}$ et l'énergie mécanique devient $\mathcal{E}_m = e^2Mgh_0 + Mg\ell_0$. La hauteur de rebond est atteinte lorsque $v = 0$, l'énergie mécanique a alors comme expression $\mathcal{E}'_m = Mg(\ell_0 + h_1)$. Par conservation, on obtient

$$h_1 = e^2 h_0.$$

Ainsi, si $e > 0,9$, $\frac{h_1}{h_0} > 0,9^2 = 0,81 > 0,8$, conformément à ce qu'affirment les auteurs de l'article.

II.9) La vitesse après le $n^{\text{ième}}$ rebond est $v_n = e^n v_0 = e^n \sqrt{2gh_0}$.

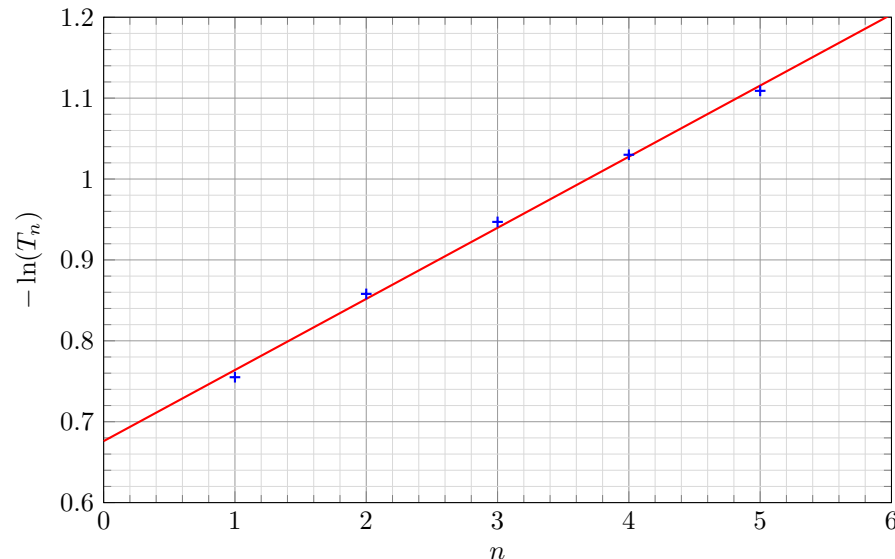
Lors de la montée, l'accélération est constante $\vec{a} = \vec{g}$, et la vitesse évolue selon l'équation horaire $v(t) = v_n - gt$. L'altitude

maximale est atteinte à l'instant où $v = 0$ soit $t = \frac{v_n}{g}$. La redescente dure la même durée. On a donc $T_n = 2\frac{v_n}{g} = 2e^n \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$.

C'est le résultat demandé.

II.10) Selon la théorie $-\ln(T_n)$ est une fonction affine de n : $-\ln(T_n) = -\ln\left(\sqrt{\frac{8h_0}{g}}\right) - n \ln(e)$.

Le graphe obtenu peut être modélisé par une droite avec un bon accord, ce qui valide le modèle théorique.



Graphiquement, $-\ln(T_n) = a.n + b$ où :

- l'ordonnée à l'origine est $b = 0,68$;
- le coefficient directeur est

$$a = \frac{1,12 - 0,68}{5} = 0,088$$

On en déduit $e = \exp(-a) = 0,92$ et

$$h_0 = \frac{g}{8} \exp(-2b) = 31 \text{ cm}.$$