

PROBLÈME I

Bulles de champagne

Le champagne est une boisson incontournable des grandes réceptions. La magie du champagne se produit à l'ouverture : éjection du bouchon, apparition de fines bulles qui montent dans le verre puis éclatent en libérant des arômes. Ce problème étudie l'origine et le mouvement de ces bulles.

Données :

- masse molaire du dioxyde de carbone $M_{\text{CO}_2} = 44,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$;
- constante des gaz parfaits $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

Partie A. Formation des bulles

Le processus de fermentation du jus de raisin produit du dioxyde de carbone, qui se dissout partiellement dans le vin.

Document : loi de Henry

Si on note P_i la pression partielle d'une espèce chimique en phase gazeuse et c_i sa concentration molaire dans la phase liquide, ces deux grandeurs suivent, **à l'équilibre**, une relation de proportionnalité appelée loi de Henry :

$$c_i = k_H P_i \quad (1)$$

où k_H s'appelle la constante de Henry dont la valeur dépend fortement de la température T (en Kelvin), suivant la loi :

$$k_H = k_0 \exp\left(\frac{\alpha}{T}\right) \quad (2)$$

Pour le dioxyde de carbone dans le champagne, $k_0 = 1,2 \times 10^{-6} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{bar}^{-1}$ et $\alpha = 2983 \text{ K}$.

I.1) Proposer une représentation de Lewis pour le dioxyde de carbone CO_2 . Cette molécule est-elle polaire ? Se dissout-elle bien dans l'eau *a priori* ?

I.2) Justifier que la constante de Henry puisse être interprétée comme la constante d'équilibre thermodynamique d'une certaine réaction dont on donnera l'équation.

I.3) Dans une bouteille contenant un volume $V = 750 \text{ mL}$ de champagne la masse totale m de dioxyde de carbone emprisonnée est $m = 9 \text{ g}$.

Calculer la pression partielle de dioxyde de carbone dans la phase gazeuse à 10°C en supposant que cette masse reste majoritairement sous forme dissoute.

En déduire la masse de dioxyde de carbone présente dans le volume $v = 25 \text{ mL}$ de gaz qui surplombe le liquide. Commenter.

I.4) Expliquer en quoi il serait dangereux de laisser une bouteille de champagne dans une voiture en plein été de manière prolongée.

I.5) Expliquer en quoi l'ouverture de la bouteille implique *a priori* la formation des bulles au sein du liquide.

Cette situation, dite de sursaturation du champagne en gaz carbonique, est certes une condition nécessaire, mais pas encore suffisante pour y voir apparaître des bulles. Pour ce faire, il faut aussi vaincre les forces de cohésion qui relient les molécules du liquide entre elles.

Les bulles ne peuvent ainsi pas apparaître *ex nihilo*. Ce sont des bulles d'air, piégées dans les anfractuosités des fibres de cellulose provenant des torchons d'essuyage du verre, qui grossissent en absorbant du dioxyde de carbone dissous avant de s'échapper lorsqu'elle a atteint une taille critique.

I.6) Quelles sont les forces de cohésion évoquées ?

Partie B. Montée des bulles

On cherche à étudier la trajectoire des bulles une fois en liberté au sein du liquide de masse volumique $\rho_{\text{liq}} \simeq 1,00 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$. On se place dans le référentiel terrestre, supposé galiléen, auquel on adjoint un repère d'espace $(O, \vec{e}_z)$ vertical orienté vers le haut, où $\vec{e}_z$ est un vecteur unitaire. Lors de la montée, la bulle de rayon $r = 1,0 \text{ mm}$ et de masse constante est soumise, outre son poids, à la poussée d'Archimède et à une force de frottement fluide, appelée force de Stokes, traduisant la résistance de l'eau, de norme $f = 6\pi\eta r v$, où η est la viscosité du champagne et vaut $\eta = 1,3 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ à la température $T = 298 \text{ K}$ et v la vitesse de la bulle.

On supposera dans toute cette partie que la pression de CO_2 dans la bulle est constante et vaut $P_0 = 1,00 \text{ bar}$.

I.7) Montrer que le poids de la bulle est négligeable devant la poussée d'Archimède.

I.8) En appliquant la deuxième loi de Newton à la bulle, établir l'équation différentielle vérifiée par la bulle. On la mettra sous la forme :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \frac{\vec{v}_{\text{lim}}}{\tau} \quad (3)$$

où τ et $\vec{v}_{\text{lim}}$ sont des constantes dont on donnera l'expression en fonction de ρ_{liq} la masse volumique du liquide, ρ_{CO_2} celle du CO_2 gazeux, η , r et g .

I.9) Que représente τ ? Calculer sa valeur numérique. Quelle approximation peut ainsi être effectuée ?

L'émission des bulles se fait la plupart du temps de manière périodique, ce qui rend l'étude plus aisée. La méthode expérimentale utilisée par Gérard Liger-Belair et son équipe du laboratoire d'Enologie de Reims en 1999 est présentée sur la figure 1a).

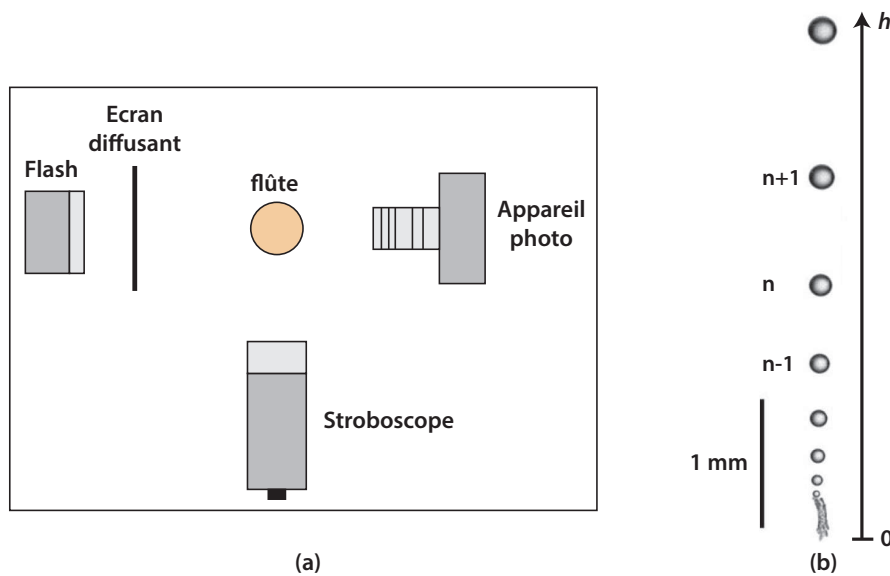


FIGURE 1 – Dispositif expérimental (a) et cliché obtenu par cette méthode (b)

Ils ont cherché à photographier un train de bulles dans une flûte de champagne à un instant donné en se servant d'un appareil photographique dont l'ouverture du diaphragme est synchronisée avec un flash. Un écran en plastique est interposé entre le verre et le flash afin d'homogénéiser la lumière. Les distances sont étalonnées à l'aide d'un papier millimétré collé à la surface du verre. Enfin, on utilise un stroboscope, appareil émettant à intervalles de temps régulier des éclairs de lumière à une fréquence f_b bien choisie.

La figure 1b) constitue un exemple de cliché obtenu avec $f_b = 20 \text{ Hz}$.

I.10) Évaluer la vitesse de la bulle indicée n .

On peut également mesurer le rayon de chaque bulle, ce qui permet finalement de tracer la vitesse U en fonction du rayon R sur la courbe de la figure 2. Cette figure est en échelle logarithmique, c'est-à-dire que $\log(U)$ est représenté en fonction de $\log(R)$ en échelle linéaire.

I.11) Montrer la cohérence de l'expression théorique obtenue pour $\vec{v}_{\text{lim}}$ à la question I.8) avec les résultats expérimentaux de la figure 2.

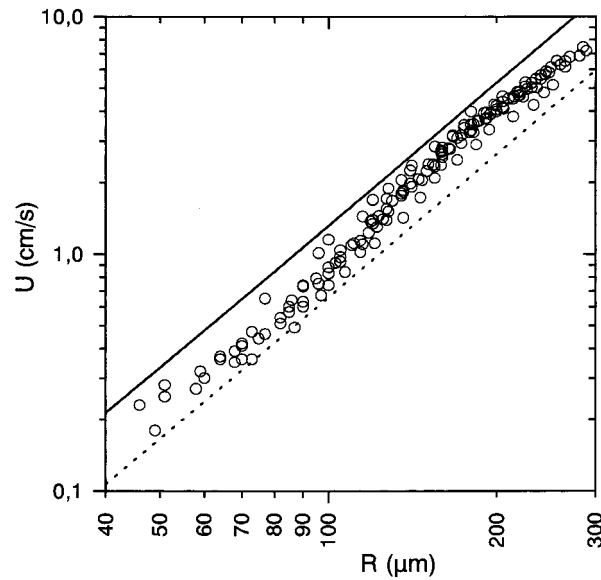


FIGURE 2 – Courbe expérimentale obtenue, les données recueillies étant des ronds (*Liger-Belair et al. (2000)*)

On observe sur la figure 1 que les bulles grossissent lors de leur ascension. Le phénomène mis en jeu est la diffusion de molécules de CO_2 à l'interface entre la bulle et le liquide. Localement, la loi de Henry est applicable au niveau de la paroi, ce qui implique que la concentration proche de la bulle de gaz c_B est inférieure à celle c_L dans le liquide. La concentration va s'homogénéiser au cours du temps, ce qui se traduit par un transfert de matière modélisé par l'équation

$$\frac{dn}{dt} = KS\Delta c \quad (4)$$

avec n la quantité de matière de CO_2 transférée dans la bulle de gaz (en mol), $S = 4\pi r^2$ la surface de la bulle, K le coefficient de transfert de matière et $\Delta c = c_L - c_B$ la différence de concentration molaire (en $\text{mol} \cdot \text{m}^{-3}$).

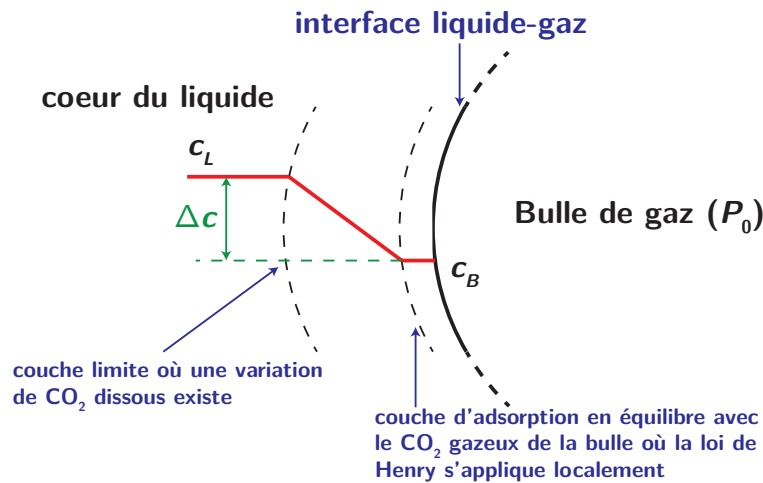


FIGURE 3 – Schéma de l'interface entre la bulle et le liquide, où la concentration en CO_2 dissous est représentée (adapté de *Liger-Belair et al. (2002)*)

I.12) Quelle est la dimension de K ?

I.13) En se servant de la relation des gaz parfaits, montrer que le rayon de la bulle varie selon l'équation :

$$\frac{dr}{dt} = \frac{RT}{P_0} K \Delta c \quad (5)$$

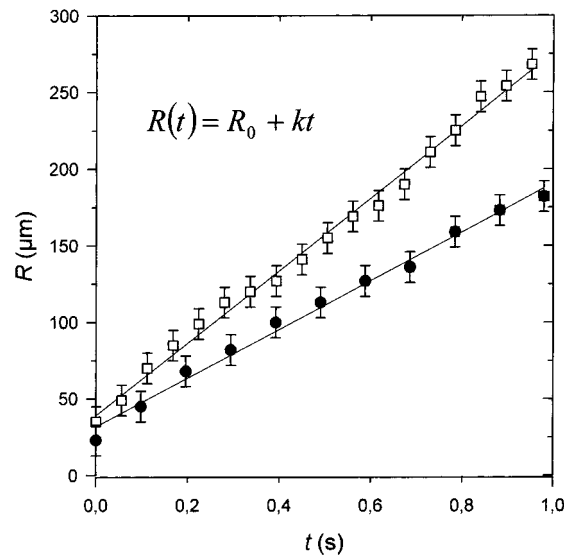


FIGURE 4 – Évolution du rayon d’une bulle au cours de son ascension dans une flûte de champagne (*Liger-Belair et al. (2002)*)

Les mesures expérimentales effectuées à 20 °C sur deux trains de bulles observés dans une flûte de champagne à des moments différents sont représentées figure 4.

I.14) Montrer que les mesures expérimentales sont en accord avec ce qui précède.

I.15) Connaissant $K = 7,8 \times 10^{-5}$ dans l’unité du système international, déterminer la valeur de Δc pour les deux séries de mesures.

I.16) Laquelle de deux séries a été obtenue en premier ? Justifier.

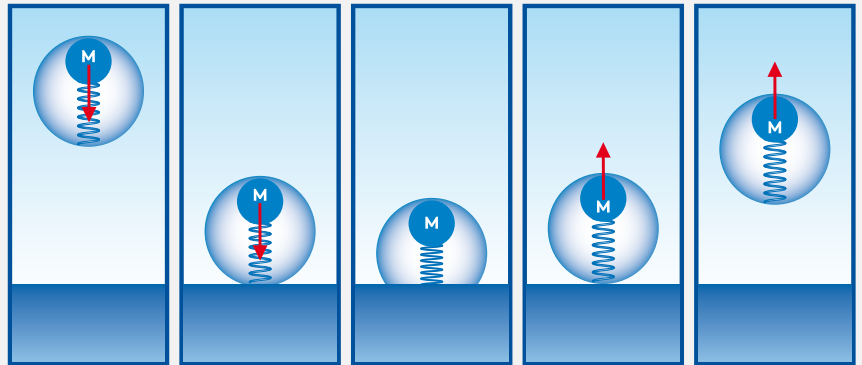
PROBLÈME II

Rebond d'une balle sur le sol

Document : les superballes

Lâchons, sans lui donner d'effet, une balle supposée idéale. Lors de sa chute, l'énergie potentielle de pesanteur est convertie en énergie cinétique. Au contact du sol, la balle se comprime et, au moment où elle s'immobilise complètement, son énergie se retrouve intégralement stockée sous forme d'énergie potentielle élastique. La balle se détend alors, retrouve sa forme initiale, rebondit avec une vitesse verticale opposée à la vitesse incidente et remonte jusqu'à sa hauteur initiale.

On peut assimiler la balle et son élasticité à une masse M attachée à un ressort. Au moment de l'impact sur la surface, le ressort se comprime puis se détend, d'où le rebond.



Évidemment, tout cela suppose l'absence de dissipation d'énergie, ce dont on peut douter : une balle réelle ne rebondit pas si haut. Là réside la première des qualités des superballes. Composées de Zectron, un caoutchouc synthétique breveté par le chimiste américain Norman Stingley en 1964, leur coefficient de restitution – le rapport vitesse de rebond / vitesse incidente – dépasse les 90 %, ce qui les fait remonter à plus de 80 % de la hauteur de chute.

Jean-Michel Courty et Édouard Kierlik, Superballes, superrebondissements, *Pour la Science*, 465, Juillet 2016

L'objectif du problème est d'utiliser la modélisation proposée dans l'article pour étudier le rebond d'une balle idéale sur un sol horizontal, puis de compléter ce modèle pour interpréter le coefficient de restitution e d'une balle réelle. Ce dernier est défini par : $e = \frac{v_r}{v_i}$ où v_r est la vitesse de rebond (ou encore la vitesse de la balle juste après le choc) et v_i la vitesse incidente (ou encore la vitesse que possède la balle juste avant le choc). Nous étudierons pour finir la hauteur de rebond de la balle pour un coefficient de restitution donné.

Partie A. Choc élastique

On utilise le modèle de la balle décrit dans l'article donné en introduction : un point matériel de masse M fixé à l'extrémité supérieure d'un ressort vertical de masse négligeable, de longueur à vide ℓ_0 et de constante de raideur k . Tant que la balle est dans l'air, le ressort prend sa longueur à vide. Mais lorsque la balle touche le sol, le ressort se comprime. La balle quitte le sol dès que le ressort a retrouvé sa longueur à vide.

Pendant le contact balle/sol qui est très bref, l'effet des forces exercées sur le point matériel autres que la force de rappel du ressort est négligeable.

Initialement, la balle arrive au contact avec le sol avec une vitesse $\vec{v}_i = -v_i \vec{e}_z$ où $\vec{e}_z$ est le vecteur unitaire vertical ascendant.

II.1) Établir l'équation différentielle vérifiée par l'altitude z du point matériel modélisant la balle, sous la forme :

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 A$$

où on exprimera ω_0 et A en fonction des données du modèle.

II.2) Quelles sont les conditions initiales au début du choc, à l'instant noté $t = 0$, pour z et $\dot{z}$?

II.3) Résoudre l'équation différentielle avec ces conditions. Quelle est l'amplitude de compression du ressort ?

II.4) Déterminer l'instant où la balle quitte le sol et l'expression du vecteur vitesse à ce moment-là. Le coefficient de restitution a-t-il la valeur attendue ?

Partie B. Choc inélastique

Pour intégrer les effets de dissipation d'énergie lors de la collision, on modifie le modèle précédent. La déformation rapide de la balle génère une force dissipative liée à la vitesse de la déformation, que l'on modélise par l'expression $\vec{F}_d = -\lambda \vec{v}$ où $\vec{v}$ est la vitesse du point matériel qui modélise la balle.

II.5) Établir l'équation différentielle du mouvement en prenant en compte cette force.

II.6) On suppose que $\lambda < 2\sqrt{kM}$. Montrer que la solution de cette équation, en prenant en compte les conditions initiales, est :

$$z(t) = \ell_0 - \frac{v_i}{\Omega} \sin(\Omega t) \exp\left(-\frac{\lambda}{2M}t\right)$$

où $\Omega = \sqrt{\frac{k}{M} - \left(\frac{\lambda}{2M}\right)^2}$.

II.7) En déduire l'expression du coefficient de restitution e en fonction de M , k et λ . Commenter l'influence de λ sur e .

Partie C. Rebonds successifs

On lâche sans vitesse initiale une balle d'une hauteur h_0 au-dessus du sol horizontal (h_0 est la hauteur du bas de la balle). Le mouvement dans l'air est une chute libre. Le rebond au sol se fait avec un coefficient de restitution e constant. On néglige la durée du rebond devant la durée passée dans l'air. L'intensité du champ de pesanteur est uniforme de valeur $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

II.8) Déterminer la hauteur h_1 atteinte après le premier rebond. L'affirmation des auteurs de l'article donné en introduction concernant la hauteur de rebond d'une superballe est-elle correcte ?

II.9) La balle fait ainsi n rebonds successifs. On nomme T_n la durée écoulée entre le $n^{\text{ième}}$ et le $(n+1)^{\text{ième}}$ rebond. Montrer que $T_n = e^n \sqrt{\frac{8h_0}{g}}$.

II.10) On réalise l'expérience suivante. On pose un smartphone en mode dictaphone sur le sol, à proximité du point d'impact de la balle. L'enregistrement sonore des chocs successifs permet d'extraire la durée écoulée entre les chocs successifs. Pour une certaine hauteur de chute, on obtient les résultats suivants :

$$T_1 = 0,470 \text{ s} \quad T_2 = 0,424 \text{ s} \quad T_3 = 0,388 \text{ s} \quad T_4 = 0,357 \text{ s} \quad T_5 = 0,330 \text{ s}$$

On trace en annexe le graphe de $-\ln(T_n)$ (avec T_n exprimé en seconde) en fonction de n .

Ces mesures sont-elles en accord avec le modèle utilisé ? Déterminer graphiquement la valeur du coefficient de restitution et de la hauteur initiale de chute. On fera apparaître les constructions graphiques sur le graphe en annexe, à rendre avec la copie.

ANNEXE à rendre avec la copie

Question II.10) Graphe de $-\ln(T_n)$ en fonction de n

