Polynômes.

Plan

1 Rappels de base sur les degrés 2 et 3 **1**

2 Définitions **3**

3 Polynôme dérivé **5**

4 Divisibilité des polynômes **7**

5 Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$ **8**

6 Fonction polynôme, racines **9**

7 Polynômes scindés **11**

8 Théorème de d'Alembert-Gauss **12**

9 Interpolation de Lagrange **13**

10 Fractions rationnelles **13**

11 Décomposition en éléments simples **14**
11.1 Cas complexe 14
11.2 Cas réel 15
11.3 Dans la pratique 15

1 Rappels de base sur les degrés 2 et 3

Soit $P = aX^2 + bX + c$ un polynôme réel de degré 2 avec $a > 0$.

On note z_1 et z_2 ses racines réelles ou complexes (dans le cas d'une racine double, c'est à dire d'une racine commune à P et P', on convient : $z_1 = z_2$).

On a :

- $\text{Min}_{x\in\mathbb{R}}\, P(x) = P(-\frac{b}{2a})$
- $P(X) = a(X - z_1)(X - z_2)$
- Si z_1 et z_2 sont complexes non réelles alors $\overline{z_2} = z_1$.
- $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \qquad z_1.z_2 = \frac{c}{a}$

Réciproquement, le système :

$$\begin{cases} x + y = s \\ x.y = p \end{cases}$$

d'inconnues x et y, s et p étant donnés, a pour solution $\{x, y\} = \{z_1, z_2\}$ où s et p sont les racines du polynôme : $X^2 - sX + p$.

Soit maintenant $Q = aX^3 + bX^2 + cX + d$ un polynôme réel de degré 3 avec $a \neq 0$.

Par le théorème des valeurs intermédiaires, Q a au moins une racine réelle : α. On peut alors factoriser Q :

$$Q(X) = a(X - \alpha)(X^2 + eX + f)$$

avec e et f réels.

On alors 2 cas :

- Q admet 3 racines réelles éventuellement confondues dans le cas d'une racine double ou triple , c'est à dire d'une racine commune à Q et Q' voire Q''.
- Q admet, en plus de α, 2 racines complexes non réelles conjuguées.

Dans les 2 cas notons z_1, z_2, z_3 les racines (éventuellement comptées 2 ou 3 fois) de Q.

On a : $Q(X) = a(X - z_1)(X - z_2)(X - z_3)$.

Par identification des développements :

- $az_1z_2z_3 = -d$
- $a(z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1) = c$
- $a(z_1 + z_2 + z_3) = -b$

L'objet de (presque) tout le chapitre qui vient est de généraliser ces quelques remarques en degré supérieur.

2 Définitions

Dans ce chapitre, on note $\mathbb{K}$ appelé corps des *scalaires* (c'est à dire des nombres) soit l'ensemble $\mathbb{R}$, soit l'ensemble $\mathbb{C}$.

Définition 1 *Un **polynôme** P à une **variable** ou **indéterminée** et à **coefficients** dans $\mathbb{K}$ est une expression du type :*

$$P = P(X) = a_dX^d + a_{d-1}X^{d-1} + \cdots + a_1X + a_0$$

où d est un entier, a_d, a_{d-1},..., a_0 sont des scalaires de $\mathbb{K}$.

Si de plus a_d est non nul, on dit que :

- d est le **degré** de P, c'est un entier.
- a_d est le **coefficient dominant** de P, c'est un scalaire
- a_dX^d est son **terme dominant**, c'est un polynôme à un terme (**monôme**).

On note $d = \deg(P)$ en convenant : $\deg(0) = -\infty$.

Le polynôme $P = P(X) = a_dX^d + a_{d-1}X^{d-1} + \cdots + a_1X + a_0 = \sum_{k=0}^{d} a_kX^k$ peut être écrit $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_kX^k$ sachant que cette somme se réduit toujours à un nombre fini de termes (on parle dans ce cas de famille **presque nulle**).

On a la propriété d'**identification** c'est à dire que 2 polynômes sont égaux quand tous leurs coefficients sont égaux termes à termes. Si les (a_k) et (b_k) sont des famille de scalaires presque nulles :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_kX^k = \sum_{k=0}^{+\infty} b_kX^k \iff (\forall k \in \mathbb{N}) \quad : \quad a_k = b_k$$

On note alors :

$$\mathbb{K}[X] = \left\{ P = \sum_{k=0}^{d} a_kX^k / d \in \mathbb{N}, a_k \in \mathbb{K} \right\}$$

l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Un scalaire non nul a_0 peut être vu comme un polynôme de degré 0 (ou **polynôme constant**). 0 peut être vu comme le polynôme nul. Ainsi, on convient que $\mathbb{K} \subset \mathbb{K}[X]$.

On appelle polynôme **unitaire** un polynôme dont le coefficient dominant est 1. Si on divise un polynôme non nul par son coefficient dominant, on obtient un polynôme unitaire.

Si $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k$ sont 2 polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et λ est un scalaire (de $\mathbb{K}$), on peut définir :

- La somme :

$$P + Q = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k\right) + \left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k + b_k) X^k$$

  (addition termes par termes),

- Le produit :

$$\lambda.P = \lambda \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda a_k X^k$$

  (produit termes par termes),

- Le produit

$$P.Q = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k\right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k.b_0 + \cdots + a_0.b_k) X^k$$

  par développement et application de la règle $X^k.X^{k'} = X^{k+k'}$. Attention, ce produit n'est pas un produit terme à terme.

- La composée

$$P \circ Q = P(Q) = P(Q(X)) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \left(\sum_{k'=0}^{+\infty} b_{k'} X^{k'}\right)^k$$

  Attention, en général $P \circ Q$ est différent de $Q \circ P$.

La somme a un élément neutre, le polynôme nul $0 = 0_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}[X]}$, le produit à un élément neutre le polynôme $1 = 1_{\mathbb{K}} = 1_{\mathbb{K}[X]}$. La composée a pour élément neutre le polynôme $P = X$.

Observons que si $P \in \mathbb{K}[X]$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$:

$$P.Q = 0 \implies P = 0 \text{ ou } Q = 0$$

Ces opérations font de $\mathbb{K}[X]$ un **anneau intègre commutatif** et un **espace vectoriel** (réel ou complexe suivant que $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Au passage, rappelons la formule du binôme de Newton valable ici :

Théorème 1 *Si P et Q sont des polynômes et si n est un entier :*

$$(P+Q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{n-k} Q^k$$

Quelques remarques sur le degré :

Propriété 1 *Si P et Q sont des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ alors :*

- $\deg(P+Q) \leq \text{Max}(\deg(P), \deg(Q))$
- $\deg(P.Q) = \deg(P) + \deg(Q)$
- $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$

Si n est un entier, on pose :

$$\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] \ / \ \deg(P) \leq n\} = \left\{P = a_0 + \cdots + a_n X^n \ / \ (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}\right\}$$

$\mathbb{K}_n[X]$ est l'ensemble des polynômes de degré **inférieur ou égal** à n. On observe que $\mathbb{K}_n[X]$ est donc un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (en fait un **sous espace vectoriel** de $\mathbb{K}[X]$).

Remarquons alors que $\mathbb{K} = \mathbb{K}_0[X]$. Les scalaires ou polynômes constants sont les polynôme de degré inférieur ou égal à 0.

3 Polynôme dérivé

Définition 2 *Si $P = a_0 + \cdots + a_d X^d = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ alors on pose :*

$$P' = \frac{dP(X)}{dX} = a_1 + \cdots + d a_d X^{d-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} k a_k X^{k-1}$$

*P' est le **polynôme dérivé** du polynôme P.*

Si P est réel, le polynôme dérivé correspond à la dérivation de la fonction associée à P, autrement dit : $(P(x))' = P'(x)$.

On a les règles opératoires suivantes (P, Q sont des polynômes, λ est un scalaire) :

- $(P+Q)' = P' + Q'$

- $(\lambda P)' = \lambda P'$
- $(PQ)' = P'.Q + P.Q'$
- Si P est non constant, $\deg(P') = \deg(P) - 1$
- Si $P' = 0$ alors P est constant.

Les 2 premières règles correspondent au fait que l'opération de dérivation est linéaire.

En itérant la dérivation, on obtient :

Définition 3 *Si $P = a_0 + \cdots + a_d X^d = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ et n est un entier alors :*

$$P^{(n)} = (P^{(n-1)})' = (\dots(P')\dots)' = \frac{d^n P(X)}{dX^n} = \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-n+1)a_k X^{k-n}$$

*$P^{(n)}$ est le polynôme **dérivée n-ième** de P. Il est nul si $n > \deg(P)$. Sinon, il a pour degré $\deg(P) - n$ et on a de plus :*

$$(P(x))^{(n)} = P^{(n)}(x)$$

On convient : $P^{(0)} = P$ et $P^{(1)} = P'$

On observe que $\mathbb{K}_n[X]$ est l'ensemble des polyômes P tels que $P^{(n+1)} = 0$.
On a les règles opératoires suivantes (P, Q sont des polynômes, λ est un scalaire) :

- $(P+Q)^{(n)} = P^{(n)} + Q^{(n)}$
- $(\lambda P)^{(n)} = \lambda P^{(n)}$

Concernant le produit, on a la règle suivante :

Théorème 2 (Formule de Leibniz) *Si P et Q sont des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ alors :*

$$(P.Q)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)}.Q^{(n-k)}$$

Une application de la dérivation qui sera revu en détail dans le cours d'analyse est l'important :

Théorème 3 (Formule de Taylor) *Si P est polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré (au plus) n et si $\alpha \in \mathbb{K}$ alors :*

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k$$

4 Divisibilité des polynômes

L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ partage beaucoup de propriétés algébriques avec l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs, ainsi on retrouve les notions de multiples, diviseur, division euclidienne ...

Définition 4 *Si P et Q sont 2 polynômes alors dit que*

- *P est **un mutiple de** Q ou*
- *Q est **un diviseur de** P ou*
- *Q **divise** P*

et on note :

$$Q|P$$

quand il existe un polynôme R tel que :

$$P = Q.R$$

On observe que si P est non nul et $Q \mid P$ alors $\deg(Q) \leq \deg(P)$ (condition non suffisante).

Par analogie avec les nombres entiers, un polynôme non constant est dit **irréductible** quand ses seuls diviseurs non constants lui sont proportionnels. Les polynômes de degré 1 sont irréductibles.

On a les règles opératoires suivantes (P, Q, R des polynômes non nuls, λ est un réel) :

Propriété 2

- $P \mid Q$ et $Q \mid R \implies P \mid R$;
- $P \mid Q$ et $P \mid R \implies P \mid Q + R$;
- $P \mid Q$ et R quelconque $\implies P \mid R.Q$;
- $P \mid Q$ et $Q \mid P \implies Q = \lambda P$ *avec* $\lambda \in \mathbb{K}^*$;

Dans le dernier cas, on dit que P et Q sont **associés**.

Si $P \in \mathbb{K}[X]$ est fixé, l'ensemble des multiples de P est l'ensemble :

$$\{P.R \in \mathbb{K}[X] / R \in \mathbb{K}[X]\} = P.\mathbb{K}[X]$$

D'après les propriétés précédentes, $P.\mathbb{K}[X]$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

On dispose d'une division euclidienne :

Théorème 4 (Division euclidienne) *Si A et B sont 2 polynômes de $\mathbb{K}[X]$ (B non constant) alors il existe un unique couple Q, R de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tels que :*

- $A = BQ + R$
- $\deg(R) < \deg(B)$

On dit que :

- *A est le **dividende**,*
- *B le **diviseur**,*
- *Q le **quotient**,*
- *R le **reste***

de la division euclidienne de A par B.

La division euclidienne "se pose" et se calcule de manière analogue à celle des entiers, on s'arrête quand le degré du reste est inférieur à celui du diviseur.

À noter que A divise B si et seulement si le reste de la division euclidienne de A par B est nul.

5 Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

Soit P et Q 2 polynômes de $\mathbb{K}[X]$ dont au moins un est non nul.

Théorème 5 *Parmi les diviseurs de P et Q ceux sont qui sont de degré maximal sont appelés **plus grands diviseurs communs** (**PGCD**) de P et Q.*

Tous les PGCD de P et Q sont associés (proportionnels). Parmi ceux ci un seul est unitaire. Il est noté $P \wedge Q$.

Un polynôme divise P et Q si et seulement si il divise $P \wedge Q$.

L'**algorithme d'Euclide** pratiqué à l'aide de la division euclidienne comme pour les entiers fournit une suite finie de polynômes de degrés strictement décroissants qui se termine par un PGCD de P et Q.

L'algorithme d'Euclide étendu fourni une **relation de Bezout** entre P et Q c'est à dire 2 polynômes U et V tels que :

$$P \wedge Q = U.P + V.Q$$

Théorème 6 *Parmi les multiples de P et Q ceux sont qui sont de degré minimal sont appelés **plus petits communs multiples** (**PPCM**) de P et Q.*

Tous les PPCM de P et Q sont associés (proportionnels). Parmi ceux ci un seul est unitaire. Il est noté $P \vee Q$.

On montre comme pour les entiers : il existe $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$P.Q = \lambda(P \wedge Q).(P \vee Q)$$

On prolonge l'analogie avec les nombres entiers.

P et Q sont 2 polynômes non nuls.

On dit que P et Q sont **premiers entre eux** quand de manière équivalente :

- $P \wedge Q = 1$,
- Il existe U et V des polynômes tels que : $P.U + Q.V = 1$ (théorème de Bezout).

Propriété 3 (Lemme de Gauss) *P, Q, R sont des entiers naturels non nuls.*

$$Si \;\; P \mid Q.R \;\; et \;\; P \wedge Q = 1 \;\; alors \;\; P \mid R$$

Soit $P_1, \ldots, P_n$ sont des polynômes non tous nuls.

Théorème 7 *Parmi les diviseurs communs de $P_1, \ldots, P_n$ ceux sont qui sont de degré maximal sont appelés **plus grands diviseurs communs** (**PGCD**) de $P_1, \ldots, P_n$.*

*Si D est un PGCD de $P_1, \ldots, P_n$, il existe $U_1, \ldots, U_n$ des polynômes tels que (**relation de Bezout**) :*

$$D = U_1.P_1 + \cdots + U_n.P_n$$

On dit que les polynômes $P_1, \ldots, P_n$ sont **premiers entre eux dans leur ensemble** quand 1 est un PGCD de $P_1, \ldots, P_n$. Si les polynômes $P_1, \ldots, P_n$ sont premiers entre eux 2 à 2 alors ils sont premiers entre eux dans leur ensemble la réciproque étant fausse.

6 Fonction polynôme, racines

Définition 5 *Si $P = P(X) = a_0 + \cdots + a_n X^n$ est un polyôme de $\mathbb{K}$, on lui associe la fonction :*

$$P \begin{cases} \mathbb{K} \to \mathbb{K} \\ x \to P(x) = a_0 + \cdots + a_n x^n \end{cases}$$

*qui est appélée **fonction polynomiale** ou simplement polynôme $P(x)$.*

Le fait que 2 polynômes différents définissent des fonctions polynomiales différentes rend possible l'identification entre polynômes et fonction associées.

Définition 6 *Si α est un scalaire ($\alpha \in \mathbb{K}$) et P un polynôme de non nul de $\mathbb{K}[X]$, on dit que α est une* ***racine*** *de P quand :*

$$P(\alpha) = 0$$

Une ***équation algébrique*** *est une équation du type : $P(z) = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{K}$ avec $P \in \mathbb{K}[X]$ fixé. Résoudre l'équation c'est donc trouver les racines du polynôme associé.*

Les équations algébriques et l'arithmétique des polynômes sont reliés par la propriété suivante :

Propriété 4 *Si α est un scalaire ($\alpha \in \mathbb{K}$) et P un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$ alors α est racine de P si et seulement si $(X - \alpha)|P$.*

Plus généralement, le reste de la division euclidienne de P par $(X - \alpha)$ est $P(\alpha)$.

En continuant (éventuellement) à diviser, on obtient, si α est racine de P :

$$P = (X - \alpha)^{d_\alpha}.Q$$

avec $Q \in \mathbb{K}[X]$, $Q(\alpha) \neq 0$ et $d_\alpha \in \mathbb{N}^*$. d_α est **l'ordre de multiplicité** de la racine, il est inférieur ou égal au degré du polynôme. On conviendra si α n'est pas une racine de P que $d_\alpha = 0$. Une racine est dite simple quand elle est d'ordre de multiplicité 1.

Une définition équivalente du degré de multiplicité d_α de la racine α de P est que $(X - \alpha)^{d_\alpha}$ divise P mais pas $(X - \alpha)^{d_\alpha+1}$.

Notons en particulier comme conséquence :

Propriété 5 *Le nombre de racines d'un polynôme, comptées avec leur ordre de multiplicité ou pas, est majoré par le degré du polynôme.*

Le cas des racines complexes des polynômes réels est important :

Propriété 6 *Si P est un polynôme non nul de $\mathbb{R}[X]$, et α est complexe non réel et d un entier alors :*

α est une racine de multiplicité d de P si et seulement si $\overline{\alpha}$ est une racine de multiplicité d de P.

Dans ce cas, le polynôme (réel !) $(X - \alpha)^d(X - \overline{\alpha})^d$ divise le polynôme P.

Le lien entre les dérivées n-ièmes et la multiplicité des racines est donné par l'important résultat qui suit :

Propriété 7 *Si P est un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$, α est un scalaire de $\mathbb{K}$ et d un entier alors :*

α est une racine de multiplicité d de P si et seulement si :

$$P(\alpha) = 0, \ldots, P^{(d-1)}(\alpha) = 0 \text{ et } P^{(d)}(\alpha) \neq 0$$

Une racine α est donc simple quand $P(\alpha) = 0$ et $P'(\alpha) \neq 0$.

7 Polynômes scindés

Définition 7 *Si P est un polynôme de non nul de $\mathbb{K}(X)$, on dit qu'il est* ***scindé*** *sur $\mathbb{K}$ si on peut écrire (au moins en théorie) :*

$$P(X) = \lambda\,(X-\alpha_1)^{d_1}\,.\,(X-\alpha_2)^{d_2}\,.\,\ldots\,.\,(X-\alpha_p)^{d_p}$$

ou :

$$P(X) = \lambda\,(X-\beta_1)\,.\,(X-\beta_2)\,.\,\ldots\,.\,(X-\beta_d)$$

avec $d_1,\ldots,d_p$ des entiers, $\alpha_1,\ldots,\alpha_p$ des scalaires de $\mathbb{K}$ distincts 2 à 2, $\beta_1,\ldots,\beta_p$ des scalaires de $\mathbb{K}$.

Dans la première égalité, on dit que l'on compte les racines suivant leur ordre de multiplicité. On a donc : d_1 est l'ordre de multiplicité de la racine α_1, ..., d_p est l'ordre de multiplicité de la racine α_p et on a :

$$d_1 + \cdots + d_p = \deg(P)$$

et $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_d\}$. Dans la deuxième égalité les racines sont éventuellement confondues. L'ordre de multiplicité d'une racine est donc le nombre de fois qu'elle apparait dans la liste : $\beta_1,\ldots,\beta_p$. Ainsi, un polynôme scindé sur $\mathbb{K}$ de degré d a d racines dans $\mathbb{K}$ comptées avec leurs ordres de multiplicités respectifs.

Si

$$P = a_0 + \cdots + a_{d-1}X^{d-1} + X^d = (X-\beta_1)\,.\,(X-\beta_2)\,.\,\ldots\,.\,(X-\beta_d)$$

est un polynôme scindé et unitaire de degré d alors, en identifiant les développements, on obtient :

Propriété 8 *La somme des racines de P est :*

$$\sum_{k=1}^{d}\beta_k = -a_{d-1}$$

Le produit des racines de P est :

$$\prod_{k=1}^{d}\beta_k = (-1)^d a_0$$

Plus généralement, si on pose pour $1 \leq k \leq d$:

$$\sigma_k = \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq d}\beta_{i_1}.\ldots.\beta_{i_k}$$

alors on a :

Propriété 9 (relation racines-coefficients)

$$\sigma_k = (-1)^k a_{n-k}$$

Un critère pratique :

Propriété 10 *Si 2 polynômes sont scindés alors ils sont premiers entre eux si et seulement si ils n'ont pas de racine commune.*

8 Théorème de d'Alembert-Gauss

Le théorème de d'Alembert-Gauss dit aussi théorème fondamental de l'algèbre est la clef de l'analyse des polynômes complexes.

Théorème 8 (Théorème de d'Alembert-Gauss) *Tout polynôme P non constant de $\mathbb{C}[X]$ (et donc de $\mathbb{R}[X]$) admet au moins une racine complexe, ou de manière équivalente :*
Si P est un polynôme non nul de $\mathbb{C}[X]$, il est scindé dans $\mathbb{C}$, autrement dit, on peut en théorie écrire :

$$P(X) = \lambda \left(X - \alpha_1\right)^{d_1} . \left(X - \alpha_2\right)^{d_2} \ldots . \left(X - \alpha_p\right)^{d_p}$$

où $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ sont les racines complexes de P et $d_1, \ldots, d_p$ leurs multiplicités respectives.

Ce théorème est puissant pour la théorie mais c'est un résultat **non effectif** : il ne dit pas comment calculer les nombres $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$. Il se contente de montrer qu'ils existent...

Concernant les polynômes réels, on en déduit :

Propriété 11 *Tout polynôme non nul P de $\mathbb{R}[X]$ peut être, en théorie, écrit sous la forme :*

$$P = \lambda . P_1 . \ldots . P_n . \left(X - \alpha_1\right)^{d_1} \ldots \left(X - \alpha_m\right)^{d_m}$$

où les nombres $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ sont les racines réelles de P (distinctes 2 à 2), $d_1, \ldots, d_p$ leurs ordres de multiplicité et $P_1, \ldots P_n$ sont des polynômes réels de degré 2 (distincts ou non) et de discriminant strictement négatif et donc sans racine réelle.

Concluons en remarquant qu'une formulation possible du théorème de d'Alembert-Gauss est :

Propriété 12 *Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatif.*

9 Interpolation de Lagrange

On considère n réels distincts 2 à 2 $x_1, \ldots, x_n$ (la technique fonctionne aussi dans $\mathbb{C}$).

Théorème 9 (Théorème d'interpolation de Lagrange) *Si $y_1, \ldots, y_n$ sont n valeurs réelles (resp. complexes) fixées, il existe un unique polynôme P réel (resp. complexe) de degré au plus $n-1$ tel que :*

$$\begin{cases} P(x_1) = y_1 \\ \vdots \\ P(x_n) = y_n \end{cases}$$

Plus précisément : on pose, pour $1 \leq i \leq n$:

$$L_i(X) = \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{(X - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

L_i est le i-ième polynôme de Lagrange associé aux valeurs $x_1, \ldots, x_n$. Alors :

$$P(X) = \sum_{i=1}^{n} y_i . L_i(X)$$

Dans les conditions précédentes, P est le **polynôme interpolateur de Lagrange** associé au système $P(x_1) = y_1, \ldots, P(x_n) = y_n$.

Notons et c'est en fait le point clef, que $L_i(x_j) = 0$ pour $1 \leq j \leq n$, $j \neq i$, et $L_i(x_i) = 1$.

10 Fractions rationnelles

Définition 8 *Une **fraction rationnelle** F ou $F(X)$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ et a une indéterminée X est une expression formelle :*

$$F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$$

où $P(X)$ et $Q(X)$ sont des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ et $Q(X)$ est non nul.

On note $\mathbb{K}(X)$ l'ensemble des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{K}$. Les calculs dans l'ensemble $\mathbb{K}(X)$ se font formellement comme dans l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$. Ainsi, entre autre :

- On a l'égalité $F(X) = \dfrac{P(X)}{Q(X)} = \dfrac{R(X)}{S(X)}$ si et seulement si $P(X).S(X) = R(X).Q(X)$.
- Tout polynôme $P(X)$ de $\mathbb{K}[X]$ peut être écrit sous la forme $P(X) = \dfrac{P(X)}{1}$. On a donc : $\mathbb{K}[X] \subset \mathbb{K}(X)$.

- Toute fraction rationnelle $F(X) = \dfrac{P(X)}{Q(X)}$ non nulle est inversible d'inverse : $\dfrac{Q(X)}{P(X)}$. L'ensemble $\mathbb{K}(X)$ est donc un corps.

On considère une fraction rationnelle non nulle $F(X) = \dfrac{P(X)}{Q(X)}$ avec P et Q des polynômes.

On pose $\deg(F) = \deg(P) - \deg(Q)$. $\deg F$ est le **degré** de la fraction F. Il ne dépend pas de l'écriture $F = \frac{P}{Q}$ choisie.

Si on fait la division euclidienne de P par Q on a : $P(X) = E(X).Q(X) + R(X)$ et $\deg(R) < \deg(Q(X)$ et du coup :

$$F(X) = E(X) + \frac{R(X)}{Q(X)}$$

avec $\deg(R(X)) < \deg(Q(X))$. Dans ces conditions, le polynôme $E(X)$ est **la partie entière** de la fraction rationnelle $F(X)$. Elle ne dépend pas de l'écriture $F = \frac{P}{Q}$ choisie.

Si $P(X)$ et $Q(X)$ sont premiers entre eux alors on dit qu'on a écrit F sous forme **irréductible**. A la multiplication par des constantes prés, cette écriture est unique.

Considérons une fraction rationnelle $F(X) = \dfrac{P(X)}{Q(X)}$ non nulle écrite sous forme irréductible.

Les **zéros** de F sont ceux de P. On définit alors la multiplicité d'un zéro $z_0 \in K$ de F : c'est la multiplicité de z comme zéro de P. Les **pôles** de F sont les zéros de Q. Si z est un zéro de multiplicité k de Q, on dit que z est un pôle de multiplicité k de F.

11 Décomposition en éléments simples

11.1 Cas complexe

Considérons une fraction rationnelle complexe écrite sous forme irréductible $F = \frac{P(X)}{Q(X)}$ avec Q unitaire. On suppose de plus que la partie entière de F est nulle, c'est à dire $\deg(P) < \deg(Q)$.

Considérons les pôles distincts de $F(X)$: λ_1 de multiplicité d_1,...,λ_p de multiplicité d_p. Autrement dit :

$$F(X) = \frac{P(X)}{(X-\lambda_1)^{d_1}.....(X-\lambda_p)^{d_p}}$$

Théorème 10 (Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}$) *Dans les conditions précédentes, il existe des nombres complexes uniques $(a_{i,j})_{i=1,...,p\ j=1,...,d_p}$ tel que :*

$$F(X) = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{d_p} \frac{a_{i,j}}{(X-\lambda_i)^j} \right)$$

11.2 Cas réel

Considérons une fraction rationnelle réelle écrite sous forme irréductible $F = \frac{P(X)}{Q(X)}$ avec Q unitaire. On suppose de plus que la partie entière de F est nulle, c'est à dire $\deg(P) < \deg(Q)$.

Considérons les pôles réels distincts de $F(X)$: λ_1 de multiplicité d_1,...,λ_p de multiplicité d_p. Autrement dit :

$$F(X) = \frac{P(X)}{(X-\lambda_1)^{d_1}.....(X-\lambda_p)^{d_p}.P_1^{\alpha_1}.....P_n^{\alpha_n}}$$

où $P_1, \ldots, P_n$ sont des polynômes réels de degré 2 sans racine réelle.

Théorème 11 (Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}$) *Dans les conditions précédentes, il existe des nombres réels uniques $(a_{i,j})_{i=1,...,p\ j=1,...,d_i}$, $(b_{i,j})_{i=1,...,n\ j=1,...,\alpha_i}$, $(c_{i,j})_{i=1,...,n\ j=1,...,\alpha_i}$ tel que :*

$$F(X) = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{d_p} \frac{a_{i,j}}{(X-\lambda_i)^j} \right) + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{b_{i,j}X + c_{i,j}}{P_i^j} \right)$$

11.3 Dans la pratique

Le calcul des coefficients de la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$ n'est pas difficile mais assez technique. Au delà de quelques cas simples que nous verrons, on utilise des outils de calcul formel.

Propriété 13 *Si λ est un pôle simple de $F(X)$ fraction rationnelle réelle ou complexe, le coefficient de la fraction $\frac{1}{(X-\lambda)}$ dans la décomposition en éléments simples de $F(X)$ est la valeur en $X = \lambda$ de la fraction $F(X).(X-\lambda)$.*

On peut aussi appliquer la règle :

Propriété 14 *Si λ est un pôle simple de $F(X)$ fraction rationnelle réelle ou complexe, on peut écrire : $F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$ .Le coefficient de la fraction $\frac{1}{(X-\lambda)}$ dans la décomposition en éléments simples de $F(X)$ est*

$$\frac{P(\lambda)}{Q'(\lambda)}$$

On considère P un polynôme scindé non nul :

$$P = k(X - \lambda_1)^{d_1} \dots . (X - \lambda_p)^{d_p}$$

Propriété 15 (Dérivée logarithmique) *Dans les conditions précédentes :*

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{p} \frac{d_i}{(X - \lambda_i)}$$

Savoirs et savoirs faire indispensables

Savoir

Formules de Leibniz, de Newton, de Lagrange, de Taylor, relations coefficients-racines. Forme générale d'une factorisation en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$. Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$.

Savoir faire

Factorisations de polynômes par recherche de racines réelles ou complexes. Décomposition d'une fraction en éléments simples, application aux calculs de primitives de fractions rationnelles.