Chapitre P7

Oscillateurs amortis

Notions et contenus	Capacités exigibles
Oscillateur harmonique. Exemple du circuit LC.	Établir et reconnaître l'équation différentielle qui caractérise un oscillateur harmonique ; la résoudre compte tenu des conditions initiales. Caractériser l'évolution en utilisant les notions d'amplitude, de phase, de période, de fréquence, de pulsation. Réaliser un bilan énergétique.
Circuit RLC série et oscillateur mécanique amorti par frottement visqueux.	Analyser, sur des relevés expérimentaux, l'évolution de la forme des régimes transitoires en fonction des paramètres caractéristiques. Prévoir l'évolution du système à partir de considérations énergétiques. Écrire sous forme canonique l'équation différentielle afin d'identifier la pulsation propre et le facteur de qualité. Décrire la nature de la réponse en fonction de la valeur du facteur de qualité. Déterminer la réponse détaillée dans le cas d'un régime libre ou d'un système soumis à un échelon en recherchant les racines du polynôme caractéristique. Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire selon la valeur du facteur de qualité. *Capacité expérimentale : mettre en évidence la similitude des comportements des oscillateurs mécanique et électronique.* *Capacité expérimentale : réaliser l'acquisition d'un régime transitoire pour un système linéaire du deuxième ordre et analyser ses caractéristiques.*
Stockage et dissipation d'énergie.	Réaliser un bilan énergétique.

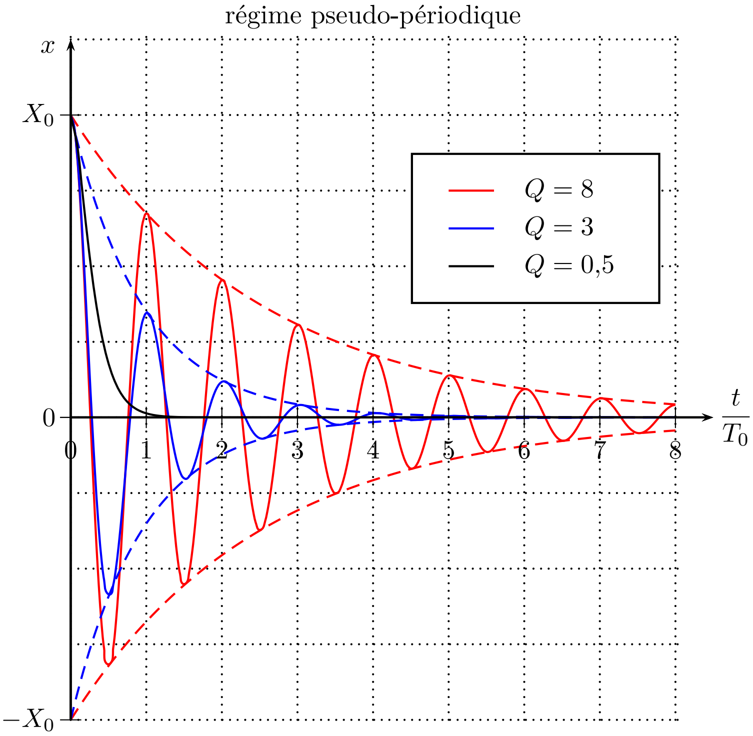
Questions de cours

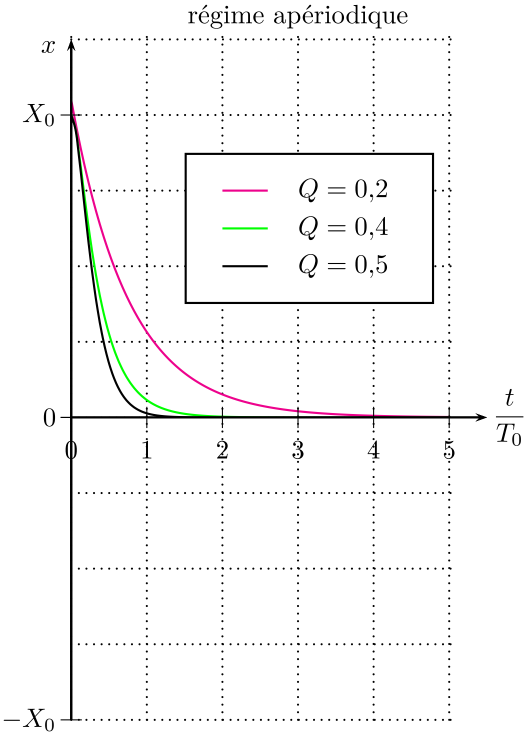
- ➢ Décrire l'analogie entre le système masse-ressort amorti et le circuit RLC série.
- ➢ Écrire l'équation différentielle d'un oscillateur amorti sous forme canonique.
- ➢ Décrire la nature de la réponse d'un oscillateur amorti en fonction de la valeur du facteur de qualité.

Document 1. Analogie oscillateur mécanique-électrique

Ressort		***Condensateur***	
élongation	x	q	charge
raideur	k	$1/C$	inverse de la capacité
force de rappel	kx	q/C	tension u_C
énergie potentielle $\mathcal{E}_p$	$\frac{1}{2}kx^2$	$\frac{1}{2}q^2/C$	énergie emmagasinée $\mathcal{E}_C$
Masselotte		***Bobine***	
vitesse	$v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$	$i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$	intensité
masse inertielle	m	L	inductance
force "inertielle"	$m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$	$L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$	tension u_L
énergie cinétique $\mathcal{E}_c$	$\frac{1}{2}mv^2$	$\frac{1}{2}Li^2$	énergie emmagsinée $\mathcal{E}_L$
Frottement visqueux		***Résistor***	
coefficient de frottement	α	R	résistance
force de frottement fluide	αv	Ri	tension u_R
puissance dissipée	αv^2	Ri^2	puissance dissipée
Oscillateur mécanique		***Oscillateur électrique***	
PFD	$m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + kx + \alpha v = F$	$L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + q/C + Ri = E$	loi des mailles
pulsation propre	$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$	$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{LC}}$	pulsation propre
facteur de qualité	$Q = \dfrac{\sqrt{mk}}{\alpha}$	$Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$	facteur de qualité

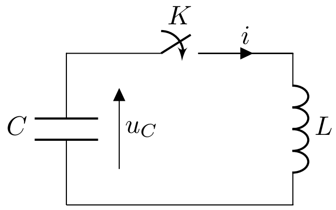
Document 2. Régimes libres d'un oscillateur amorti





Exercice de cours A. Décharge d'un condensateur dans une bobine idéale

Soit le circuit suivant, où le condensateur est initialement chargé sous la tension U_0. La bobine est idéale. À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur.



1. Que valent u_C et i juste après fermeture de l'interrupteur ?
2. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$.
3. Résoudre cette équation différentielle en prenant en compte les conditions initiales. En déduire $i(t)$.
4. Exprimer les énergies emmagasinées respectivement dans le condensateur et dans la bobine, puis dans le circuit complet. Commenter.

Exercice de cours B. Décharge d'un condensateur dans une bobine réelle

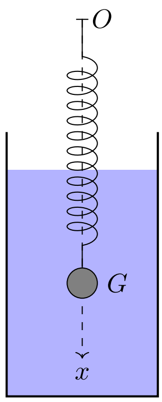
On reprend l'exercice précédent mais en prenant en compte la résistance interne de la bobine.

1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$ après fermeture de l'interrupteur.
2. Montrer qu'elle se met sous la forme :
$$\ddot{u}_C + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u}_C + \omega_0^2 u_C = 0$$
et identifier ω_0 et Q.
3. Écrire l'équation caractéristique.
4. Discuter de la nature des racines en fonction de Q.
5. On suppose r très faible. Que peut-on dire de Q ? En déduire l'expression approchée des racines du polynôme caractéristique.
6. En déduire $u_C(t)$.

Exercice de cours C. Mesure de la viscosité

On considère une bille de rayon R et de masse m suspendue à un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. Cette bille est immergée dans un fluide de masse volumique ρ et de viscosité η, qui exerce sur elle la poussée d'Archimède ainsi qu'une force de frottement fluide $\vec{f} = -6\pi\eta R\vec{v}$.

On note x la position du centre d'intertie de la bille sur l'axe vertical descendant ayant pour origine l'extrémité supérieure du ressort, qui est fixe.

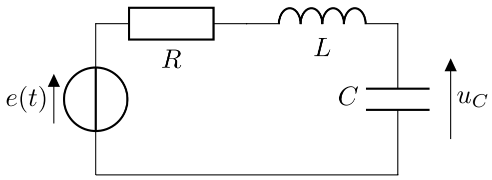


1. Déterminer la position d'équilibre x_{eq}.
2. Ëtablir l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$ lorsque la bille est en mouvement.
3. À quelle condition portant sur la constante de raideur k le mouvement de la bille dans le fluide est-il quasi-périodique ?
4. Déterminer dans cette condition la pseudo-période T du mouvement, en fonction m, η, R et de la période propre T_0.
5. Comment peut-on mesurer T_0 ?
6. En déduire une méthode pour mesurer la viscosité η d'un liquide.

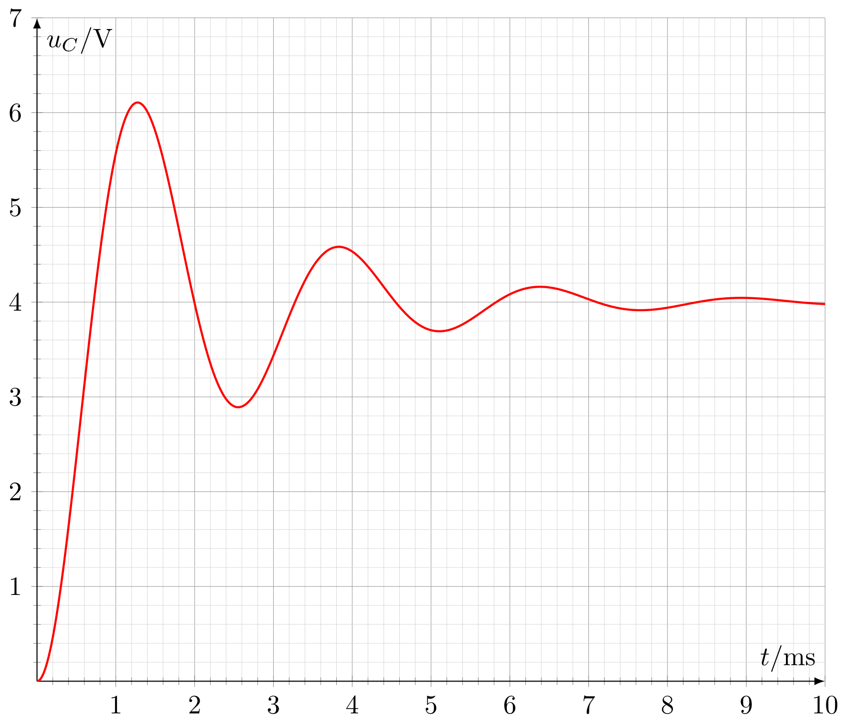
Exercice de cours D. Étude expérimentale d'un circuit RLC

On étudie le circuit ci-dessous. Le générateur produit un échelon de tension :

$$e(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ E & \text{pour } t > 0 \end{cases}$$



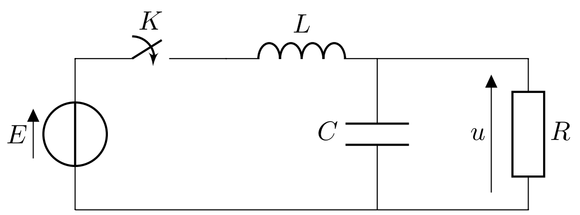
On relève la tension u_C aux bornes du condensateur pour $t > 0$:

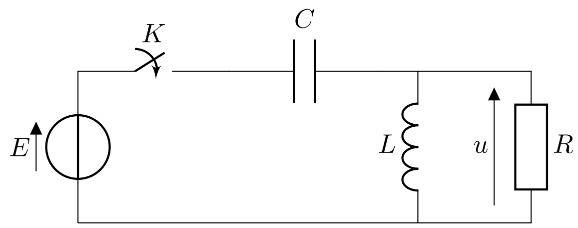


1. Obtenir l'équation différentielle vérifiée par u_C lorsque $e = E$. La mettre sous forme canonique.
2. Donner un ordre de grandeur du facteur de qualité dans cette expérience.
3. Quelles sont les conditions initiales, pour u_C et $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$, à l'instant $t = 0$ du basculement de e de 0 à E ?
4. En déduire l'expression théorique de $u_C(t)$.
5. On définit le décrément logarithmique $\delta = \ln\left(\dfrac{u_C(t) - u_{C\infty}}{u_C(t+T) - u_{C\infty}}\right)$, où T est la pseudo-période et $u_{C\infty}$ la valeur de u_C en régime permanent.
   Montrer que δ est indépendant de t et donner son expression.
6. Montrer que la mesure de δ et de T permet d'accéder aux valeurs du facteur de qualité et de la pulsation propre. Effectuer les mesures.
7. On mesure $R = 40\,\Omega$ à l'ohmmètre. En déduire les valeurs de L et C.

Exercice 1. Conditions initiales

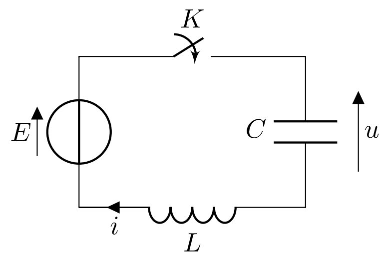
Dans les circuits suivants, déterminer les conditions initiales portant sur u et $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ immédiatement après fermeture de l'interrupteur.





Exercice 2. Circuit LC avec générateur

On considère le circuit ci-dessous comportant une bobine idéale, un condensateur idéal et une source idéale de tension en série. Avant $t = 0$, l'interrupteur est ouvert et le condensateur déchargé. On ferme l'interrupteur à $t = 0$.

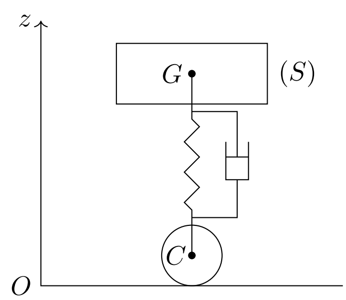


1. Déterminer l'équation différentielle sur la tension u pour $t > 0$.
2. Que vaut la tension u à $t = 0^+$? Que vaut le courant i à $t = 0^+$? En déduire $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ à $t = 0^+$.
3. Déterminer alors $u(t)$ et $i(t)$.
4. Exprimer l'énergie totale emmagasinée dans le condensateur et la bobine en fonction du temps.
5. Vérifier que la puissance reçue par ces dipôles est égale à la puissance fournie par le générateur.

Exercice 3. Suspension automobile

On étudie le fonctionnement de la suspension d'une automobile.

On considère le système (S) formé par le quart de la voiture, de centre d'inertie G et de masse M, reposant sur une roue de centre C et de rayon R par l'intermédiaire de la suspension dont l'axe CG reste toujours vertical. On supposera que (S) n'est pas couplé avec le reste de l'automobile.



La suspension est modélisée par un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0, et un amortisseur fluide qui exerce sur la voiture une force de frottement $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$ où $\vec{v} = \vec{v}_G - \vec{v}_C$ désigne la vitesse ascensionnelle de la voiture relativement à l'axe de la roue et λ est un coefficient de frottement fluide.

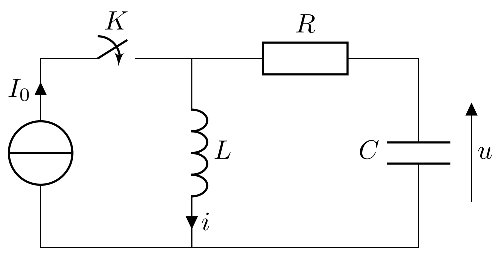
On s'intéresse uniquement au mouvement de translation verticale de (S) dans le référentiel terrestre supposé galiléen. L'axe vertical Oz, de vecteur unitaire $\vec{e}_z$, est orienté vers le haut.

Le véhicule se déplace à vitesse constante sur une route horizontale.

1. Déterminer la position d'équilibre z_e de G en fonction de M, g, k, ℓ_0 et R.
2. Établir l'équation du mouvement vertical de G en dehors de l'équilibre.
3. On règle le coefficient de frottement fluide pour que le régime d'amortissement des oscillations soit critique lorsque la voiture est vide, telle que $M = m_0 = 300\,\mathrm{kg}$. Déterminer le coefficient λ en fonction de k et m_0.
4. Avec des passagers à bord, la masse devient $M = m_0 + m$ où $m = 75\,\mathrm{kg}$. Quel est alors la nature du régime transitoire ?
5. Déterminer la pseudo-période T du mouvement du système (S) par rapport au sol.
6. Pour qu'une voiture soit confortable, il faut que les oscillations résultant d'un défaut de la route aient une période adaptée à l'organisme humain, comme par exemple la période de marche qui vaut environ 1 s. Calculer la raideur k du ressort.

Exercice 4. Étude d'un circuit

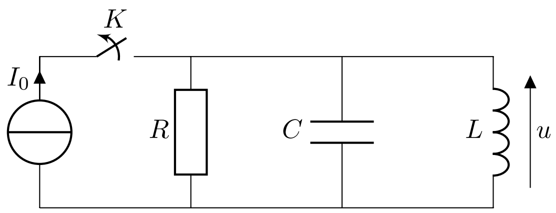
On considère le circuit ci-contre, où $I_0 = 100\,\mathrm{mA}$, $L = 40\,\mathrm{mH}$, $R = 40\,\Omega$ et $C = 1{,}0\,\mu\mathrm{F}$.



1. Quelles sont les valeurs de i et u avant la fermeture de l'interrupteur (le régime permanent est supposé atteint) ? En déduire leur valeur à $t = 0^+$ juste après fermeture de l'interrupteur.
2. Relier i à $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ et à des constantes. En déduire l'expression de $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ à $t = 0^+$.

3. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ pour $t > 0$. Calculer les valeurs de la pulsation propre et du facteur de qualité.
4. Résoudre l'équation différentielle et représenter le graphe de $u(t)$.

Exercice 5. Circuit RLC parallèle



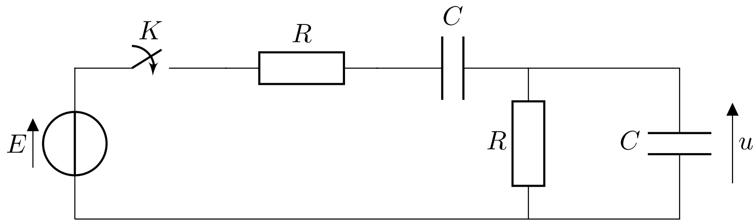
Soit un circuit comprenant une source idéale de courant I_0, un condensateur de capacité $C = 100\,\text{nF}$, une bobine idéale d'inductance $L = 100\,\text{mH}$, et un résistor de résistance $R = 500\,\Omega$ en parallèle.

À l'instant $t = 0$, on ouvre l'interrupteur K.

1. Déterminer les valeurs de la tension u et de toutes les intensités dans le circuit avant l'ouverture de l'interrupteur, où l'on se trouve en régime stationnaire.
2. Etablir l'équation différentielle vérifiée par la tension $u(t)$ pour $t > 0$.
3. Calculer la pulsation propre et le facteur de qualité du circuit.
4. En déduire l'évolution $u(t)$ pour $t > 0$. Tracer son allure.

Exercice 6. Circuit RC série/RC parallèle

On étudie le circuit suivant. L'interrupteur est ouvert depuis très longtemps. On le ferme à $t = 0$.



1. Etablir l'équation différentielle vérifiée par la tension $u(t)$. On posera $\tau = RC$.
2. Identifier la pulsation propre et le facteur de qualité. Quelle est la nature du régime transitoire ?
3. Déterminer les conditions initiales sur u et $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.
4. En déduire l'expression de $u(t)$. Tracer son allure.

Réponses

Exercice 1 : 1. $u(0^+) = 0$; $\dot{u}(0^+) = 0$; 2. $u(0^+) = E$; $\dot{u}(0^+) = -E/(RC)$.
Exercice 2 : 1.$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$; 2. tous nuls ; 3. $u(t) = E(1 - \cos(\omega_0 t))$; $i(t) = CE\omega_0 \sin(\omega_0 t)$; 4. $\mathcal{E}_{\text{tot}} = CE^2(1 - \cos(\omega_0 t))$.
Exercice 3 : 1. $z_e = R + \ell_0 - \dfrac{Mg}{k}$; 3. $\lambda = 2\sqrt{km_0}$; 5. $T = \dfrac{2\pi(m_0 + m)}{\sqrt{km}}$; 6. $k = 7{,}4 \times 10^4\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$.
Exercice 4 : 1. tous nuls ; 2. $\dot{u}(0^+) = \dfrac{I_0}{C}$; 3. $\omega_0 = 5{,}0 \times 10^3\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$; $Q = 5$; 4. régime pseudo-périodique avec $\tau = 2{,}0\,\text{ms}$ et $\Omega = 4975\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$.
Exercice 5 : 1. tout est nul sauf $i_L = I_0$; 2. $\omega_0 = 10^4\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$; $Q = 1/2$.
Exercice 6 : 2. $\omega_0 = 1/\tau$; $Q = 1/3$; 3. $u(0^+) = 0$; $\dot{u}(0^+) = E/\tau$.