Fiche 25 : TD du 20-11

Exercice 1

1. Déterminer un polynôme réel de degré au plus 2 tel que $P(-1) = 1$, $P(0) = -1$ et $P(1) = -1$. Ce polynôme est -il unique ?
2. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(-1) = 1$, $P(0) = -1$ et $P(1) = -1$.

Exercice 2

Soit $P = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$.

1. Vérifier que j est racine de P.
2. En observant de plus que P est pair, le factoriser au mieux dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

Exercice 3

Calculer $\text{PGCD}(P, Q)$ lorsque :

1. $P = X^3 - X^2 - X - 2$ et $Q = X^5 - 2X^4 + X^2 - X - 2$,
2. $P = X^4 + X^3 - 2X + 1$ et $Q = X^3 + X + 1$.

Exercice 4

On considère la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $P_0 = 2$, $P_1 = X$ et la relation de récurrence, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P_{n+1} = X.P_n - P_{n-1}$$

1. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est unitaire de degré n.
2. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}^*$:
$$P_n\left(z + \frac{1}{z}\right) = z^n + \frac{1}{z^n}$$
3. En déduire les racines de P_n (*Indication : elles sont réelles*) et sa factorisation irréductible réelle.

Exercice 5

Soit E le polynôme du troisième degré : $aX^3 + bX^2 + cX + d$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$, et soit x_1, x_2, x_3 ses trois racines dans $\mathbb{C}$. Trouver un polynôme ayant pour racines x_1x_2, x_2x_3 et x_3x_1.

Exercice 6

Soit $A \in K[X]$ de degré > 0. Montrer que pour tout polynôme $P \in K_n[X]$, il existe des polynômes $P_0, P_1, \dots, P_n$ uniques vérifiant :

$$\begin{cases} \deg P_i < \deg A \\ P = P_0 + P_1 A + \cdots + P_n A^n. \end{cases}$$

Exercice 7

Soit, pour $n \geq 0$, $P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$.

1. Démontrer que P_n n'admet que des racines simples.
2. Démontrer que, si n est entier P_{2n} n'a pas de racine réelle et P_{2n+1} a une et une seule racine réelle.