Exercice 1. Caractéristiques d'une bobine réelle

1. La loi des mailles s'écrit : $e(t) = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + (R+r)i$, et on a $u = Ri$. Ainsi, l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ s'écrit $e(t) = \dfrac{L}{R}\dot{u} + \dfrac{R+r}{R}u$ qui se met sous la forme canonique :
$$\boxed{\dot{u} + \frac{R+r}{L}u = \frac{R}{L}e(t)}$$
On identifie $\boxed{\tau = \dfrac{L}{R+r}}$ le temps caractéristique.

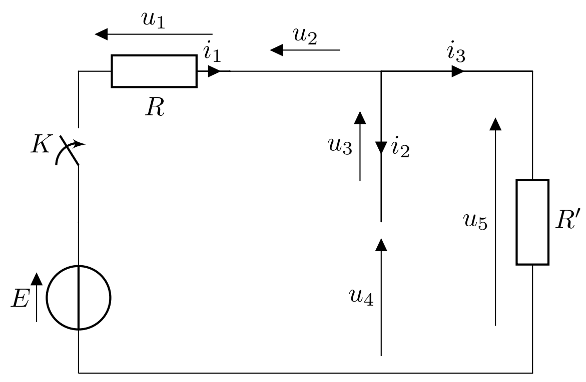
2. On place l'origine des dates au moment de la bascule. Pour $t > 0$, $e(t) = E$ et la solution générale de l'équation différentielle est $u(t) = \dfrac{R}{R+r}E + \lambda e^{-t/\tau}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
Avant l'échelon de tension, $u = e = 0$ donc le courant est nul dans le circuit. Par continuité, il le reste en $t = 0^+$ donc $u(0^+) = Ri(0^+) = 0$ (ce que confirme l'oscillogramme).
On en déduit $\lambda = -\dfrac{R}{R+r}E$.
Pour conclure, la solution de l'équation différentielle pour $t > 0$ est :
$$\boxed{u(t) = \frac{R}{R+r}E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

3. On détermine graphiquement $E = 6{,}0\,\mathrm{V}$. En régime permanent, u atteint la valeur asymptotique $u_\infty = 4{,}8\,\mathrm{V}$.
Or $u_\infty = \dfrac{R}{R+r}E$ d'où $\boxed{r = R\dfrac{E - u_\infty}{u_\infty}} = \underline{10\,\Omega}$.
Par ailleurs, on détermine la constante de temps. Avec la méthode des 63 % : $u(\tau) = \dfrac{63}{100}u_\infty = 3{,}0\,\mathrm{V}$. On lit graphiquement : $\tau = 1{,}6\,\mathrm{ms}$.
On en déduit : $\boxed{L = (R+r)\tau} = \underline{80\,\mathrm{mH}}$.

4. Si on considère que le régime transitoire dure 5τ, il faut donc que la période soit au minimum de 10τ. Ainsi la condition sur la fréquence est $\boxed{f < 1/(10\tau) = 62{,}5\,\mathrm{Hz}}$.

Exercice 2. Conditions initiales et régime permanent

En régime stationnaire, les condensateurs sont équivalents à des interrupteurs ouverts et les bobines à des fils donc le circuit est équivalents à :



On a donc $u_{2\mathrm{stat}} = u_{3\mathrm{stat}} = 0$ ainsi que $i_{2\mathrm{stat}} = 0$.

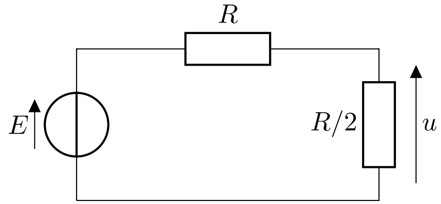
1. Avant la fermeture de l'interrupteur, on se trouve en régime stationnaire donc on a $\underline{u_2(0^-) = u_3(0^-) = 0}$ et $\underline{i_2(0^-) = 0}$.
De plus si l'interrupteur est ouvert $\underline{i_1(0^-) = 0}$ donc $\underline{u_1(0^-) = Ri_1 = 0}$.
La loi des nœuds donne $\underline{i_3(0^-) = i_1(0^-) - i_2(0^-) = 0}$ et $\underline{u_5(0^-) = R'i_3(0^-) = 0}$; la loi des mailles donne $u_3 + u_4 - u_5 = 0$ donc $\underline{u_4(0^-) = 0}$.

2. Par continuité de courant dans les bobines, on déduit que les courants restent nuls juste après fermeture de l'interrupteur (i_3 par application de la loi des nœuds).
On en déduit $\underline{u_1(0^+) = u_5(0^+) = 0}$. La tension étant continue aux bornes du condensateur, on a aussi $\underline{u_4(0^+) = 0}$. La loi des mailles appliquée à la maille de droite donne $\underline{u_3(0^+) = 0}$. Pour finir, la loi des mailles appliquée à la maille de gauche donne $\boxed{u_2(0^+) = E}$.

3. Le régime permanent est stationnaire donc $\underline{u_{2\infty} = u_{3\infty} = 0}$ et $\underline{i_{2\infty} = 0}$.
Le courant traverse les résistances R et R' en série. La tension à leurs bornes étant celle de la source idéale (loi des mailles) , on en déduit $\boxed{i_{1\infty} = i_{3\infty} = \dfrac{E}{R+R'}}$.
D'après la relation du diviseur de tension, $\boxed{u_{1\infty} = \dfrac{ER}{R+R'}}$ et $\boxed{u_{4\infty} = u_{5\infty} = \dfrac{ER'}{R+R'}}$.

Exercice 3. Circuit à deux mailles avec bobine

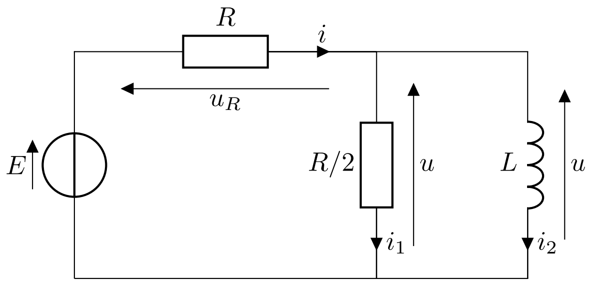
1. Avant la fermeture de l'interrupteur, aucun courant ne circule dans le circuit. Par continuité du courant qui traverse une bobine, il reste nul dans la bobine. Le circuit équivalent à $t = 0^+$ est alors simplement :



   D'après la relation du diviseur de tension, $\boxed{u(0^+) = \dfrac{R/2}{R + R/2}E = \dfrac{E}{3}}$.

2. Le régime permanent atteint est stationnaire car le générateur a une tension constante. La bobine est alors équivalente à un fil : $\boxed{u(\infty) = 0}$.

3. Introduisons les courants dans les différentes branches :



   D'après la loi des mailles, dans la maille de droite $E = u_R + u = Ri + u$ avec la loi d'Ohm.
   Selon loi des nœuds $i = i_1 + i_2$ donc $E = Ri_1 + Ri_2 + u$.
   De plus, $u = (R/2)i_1$ soit $Ri_1 = 2u$ d'où $E = Ri_2 + 3u$. On dérive cette relation : $0 = R\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + 3\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.

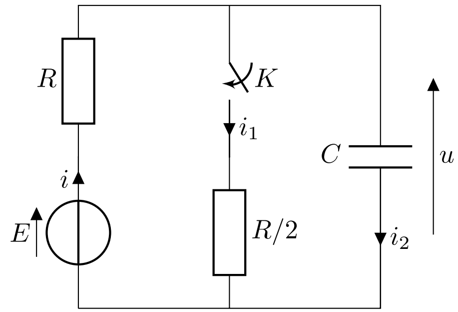
   Pour la bobine, on a la relation $u = L\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$ que l'on substitue dans l'équation précédente pour obtenir l'équation différentielle pour $u(t)$:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{3L}u = 0}$$

   C'est une équation linéaire du premier ordre homogène, de constante de temps $\boxed{\tau = \dfrac{3L}{R}}$.

4. La solution gén'erale est $u(t) = A\exp(-t/\tau)$.
   On détermine A avec la condition initiale : $u(0) = A = E/3$.
   Pour conclure : $\boxed{u(t) = \dfrac{E}{3}\exp\left(-\dfrac{R}{3L}t\right)}$.

Exercice 4. Circuit à deux mailles avec condensateur



1. À $t = 0^-$ le circuit est en régime stationnaire. Le condensateur est alors équivalent à un interrupteur ouvert, et il n'y a aucun courant dans le circuit : $\underline{i(t=0^-) = i_1(t=0^-) = i_2(t=0^-) = 0}$.
   La loi des mailles sur le grande maille, qui s'écrit en général $u = E - Ri$, nous donne $\boxed{u(t=0^-) = E}$.

2. Par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur, $\boxed{u(t=0^+) = E}$. Grâce à la loi des mailles dans la grande maille, il vient $\underline{i(t=0^+) = 0}$.
   La loi des mailles dans la maille de droite s'écrit $u = (R/2)i_1$ donc $\boxed{i_1(t=0^+) = \dfrac{2E}{R}}$.
   La loi des nœuds (appliquée à n'importe lequel des nœuds) induit $0 = i_1 + i_2$ donc $\boxed{i_2(t=0^+) = -\dfrac{2E}{R}}$.

3. Quand t tend vers l'infini, on atteint à nouveau un état stationnaire, à la différence que l'interrupteur centrale est fermé.
   $\underline{i_2(t\to\infty) = 0}$ car le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert. Le courant circule alors dans la maille de gauche, et $i_1 = i$.

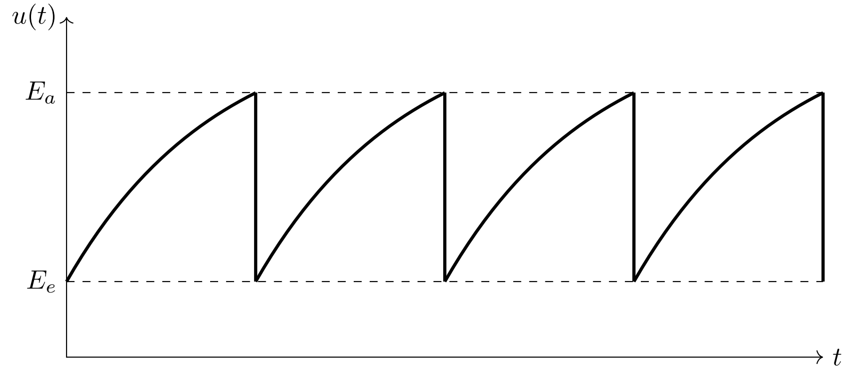
D'après la loi des mailles, $E - Ri - (R/2)i_1 = 0$ soit $E = (3R/2)i$ donc $\boxed{i(t\to\infty) = i_1(t\to\infty) = \dfrac{2E}{3R}}$.

$u = E - Ri$ donc $\boxed{u(t\to\infty) = \dfrac{E}{3}}$.

4. $u = E - Ri = E - R(i_1 + i_2)$.
   $(R/2)i_1 = u$ donc $Ri_1 = 2u$ et $i_2 = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.
   On en déduit l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$: $\boxed{RC\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + 3u = E}$.
5. La solution de l'ESSM est $u_H(t) = A\exp(-3t/(RC))$. Une solution particulière est la solution constante $u_P = E/3$.
   La solution générale de l'équation différentielle est donc $u(t) = u_H(t) + u_P = A\exp(-3t/(RC)) + E/3$.
   La condition initiale impose $u(t) = E$ d'où $A + E/3 = E$ soit $A = 2E/3$.
   Pour conclure la solution est $\boxed{u(t) = \dfrac{E}{3}\left(2\exp(-3t/(RC)) + 1\right)}$.

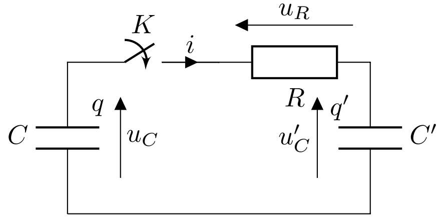
Exercice 5. Tube fluorescent

1. Si le tube reste éteint, il se comporte comme un interrupteur ouvert. En régime stationnaire, le condensateur se comporte aussi comme un interrupteur ouvert, il n'y a donc aucun courant qui circule dans le circuit. La tension aux bornes de la résistance est donc nulle, si bien que la loi des mailles donne $\boxed{u_\infty = E}$.
   Cette tension est supérieure à la tension d'allumage, le tube ne peut donc pas rester éteint.
2. Le circuit équivalent se résume à un condensateur de capacité C et une résistance r. Le condensateur se décharge dans la résistance. Initalement il est chargé sous la tension E_a, on a donc (voir exercice de cours C) : $\boxed{u(t) = E_a e^{-t/\tau}}$ avec $\boxed{\tau = rC}$.
   Le tube s'éteint à l'instant t_1 tel que $u(t_1) = E_e$ soit $\boxed{t_1 = \tau\ln(E_a/E_e)} = \underline{5{,}9\,\mu\mathrm{s}}$.
3. L'énergie dissipée par effet Joule est l'énergie que le condensateur a cédé au tube fluorescent, correspondant à la variation de l'énergie emmagasinée dans le condensateur lors de sa décharge entre E_a et E_e : $\boxed{\mathcal{E}_e = \dfrac{1}{2}C(E_a^2 - E_e^2)} = \underline{1{,}7\,\mathrm{mJ}}$.
4. Quand le tube est éteint, il n'intervient pas dans le circuit. On se retrouve avec un circuit RC série alimenté par une source idéale de tension. L'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur est : $\tau'\dot{u} + u = E$ avec $\boxed{\tau' = RC}$.
   La solution générale est $u(t) = E + Ae^{-t/\tau'}$. La condition intiale est $u(0) = E_e$ par continuité de la tension aux bornes du condensateur. On a donc $A = E_e - E$.
   Pour conclure, $\boxed{u(t) = E + (E_e - E)e^{-t/\tau'}}$.
   Le tube se rallume à l'instant t_2 tel que $u(t_2) = E_a$ soit $\boxed{t_2 = \tau'\ln\left(\dfrac{E - E_e}{E - E_a}\right)} = \underline{0{,}75\,\mathrm{ms}}$.
5. La phase de décharge est plus de 100 fois plus rapide que la phase de charge, elle semble donc instantanée. On a alors l'allure donnée plus loin.
6. La période est $\boxed{T = t_1 + t_2} = \underline{0{,}75\,\mathrm{ms}}$.
7. La puissance lumineuse moyenne est $\boxed{\mathcal{P}_{\text{moy}} = \dfrac{\mathcal{E}_e}{T}} = \underline{2{,}2\,\mathrm{W}}$.



Exercice 6. Transfert de charge

1. Dans l'état final, le courant s'annule donc les condensateurs ont la même tension u_∞ à leurs bornes. La charge totale présente sur la partie supérieure du circuit se conserve : elle vaut au départ $Q_0 + Q_0'$, et à la fin, $Q_\infty + Q_\infty'$ avec $Q_\infty = Cu_\infty$ et $Q_\infty' = C'u_\infty$. Il vient : $\boxed{u_\infty = \dfrac{Q_0 + Q_0'}{C + C'}}$.



2. En utilisant les orientations ci-dessus, la loi des mailles s'écrit : $-u_C + u_C' + u_R = 0$. En dérivant on obtient : $-\dot{u}_C + \dot{u}_{C'} + \dot{u}_R = 0$. Or $i = -C\dot{u}_C$ (convention générateur) et $i = C'\dot{u}_{C'}$ et $u_R = Ri$, si bien que l'équation s'écrit : $i/C + i/C' + R\dot{i} = 0$. En posant $\tau = \dfrac{RCC'}{C + C'}$, l'équation se met sous la forme : $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{i}{\tau} = 0$. La solution générale s'écrit $i(t) = \lambda e^{-t/\tau}$.
   Initialement les tensions aux bornes des condensateurs sont continues, donc $u_R(0^+) = u_C(0^+) - u_C'(0^+) = Q_0/C - Q_0'/C' = Ri(0^+)$. On en déduit $\lambda = i(0^+) = \dfrac{Q_0C' - Q_0'C}{RCC'}$.
   Puisque $i(t) = -\dot{q}$, $-\int_0^t i(t)\mathrm{d}t = q(t) - q(0)$. En utilisant $\int_0^t e^{-t/\tau}\mathrm{d}t = \tau(1 - e^{-t/\tau})$, on obtient :
   $q(t) = Q_0 - \lambda\tau(1 - e^{-t/\tau})$ soit $\boxed{q(t) = \dfrac{Q_0C + Q_0'C}{C + C'} + \dfrac{Q_0C' - Q_0'C}{C + C'}e^{-t/\tau}}$.
   De la même façon, $\boxed{q'(t) = \dfrac{Q_0C' + Q_0'C'}{C + C'} - \dfrac{Q_0C' - Q_0'C}{C + C'}e^{-t/\tau}}$.
   On retrouve en effet la limite $t \to \infty$ des charges.
3. $E_J = \int_0^\infty \mathcal{P}_J \mathrm{d}t = \int_0^{infty} Ri^2(t)\mathrm{d}t = R\lambda^2 \int_0^\infty e^{-2t/\tau}\mathrm{d}t = R\lambda^2\tau/2$ soit $\boxed{E_J = \dfrac{(Q_0C' - Q_0'C)^2}{2CC'(C + C')}}$.
4. L'énergie initialement emmagasinée dans les condensateurs vaut $\mathcal{E}_C(0) = \dfrac{C}{2}u_{C0}^2 + \dfrac{C'}{2}u_{C'0}^2 = \dfrac{Q_0^2}{2C} + \dfrac{Q_0'^2}{2C'}$, à la fin $\mathcal{E}_C(\infty) = \dfrac{C + C'}{2}u_\infty^2 = \dfrac{(Q_0 + Q_0')^2}{2(C + C')}$. On vérifie que $E_J = \mathcal{E}_C(0) - \mathcal{E}_C(\infty)$ qui confirme la conservation de l'énergie.