Sup MPSI, Lycée Jean Perrin, 21 Novembre 2025.

DS 3, Durée 2 h, calculatrices interdites.

Exercice 1

1. Calculer une primitive de la fonction $x \to \frac{x^2}{x^2+2x+5}$, primitive qu'on pourra noter : $\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{x^2+2x+5}$ (domaine du calcul à préciser).
2. Calculer une primitive de la fonction $x \to \frac{1}{e^x+2}$ éventuellement à l'aide du changement de variable $u = e^x$, primitive qu'on pourra noter : $\int \frac{\mathrm{d}x}{e^x+2}$ (domaine du calcul à préciser).

Exercice 2

Éventuellement en utilisant la méthode de la variation de la constante, donner la solution pour $x \in \mathbb{R}$ de l'équation différentielle d'inconnue y :

$$y'(x) + 2xy(x) = x$$

vérifiant $y(0) = 1$.

Exercice 3

Dans cet exercice, on cherche les fonctions réelles f définies sur $\mathbb{R}_+^*$, 2 fois dérivables, telles que :
pour tout $x > 0$:

$$x^2 f''(x) = -f(x)$$

problème noté (E).

1. On considère donc f une solution possible de (E).
   On pose de plus : pour $t \in \mathbb{R}$: $F(t) = f(\exp(t))$.
   (a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$:
   $$F''(t) - F'(t) + F(t) = 0$$
   (b) En déduire les valeurs possibles de F puis de f.
2. Quel est l'ensemble des solutions de (E) ?
3. Déterminer les solutions du problème (P) suivant :
   Chercher les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $x > 0$:
   $$f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$$

Exercice 4

Dans cet exercice, on veut trouver les fonctions de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}_+^\star$ telles que :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^\star)^2,\ f(xy) = f(x) + f(y).$$

problème noté (P) dans la suite.

1. Dans cette question, on note g une fonction solution du problème (P).
   (a) Déterminer $g(1)$.
   (b) Montrer que :
   $$\forall x, y \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ y.g'(xy) = g'(x).$$
   (c) Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ g(x) = a\ln(x).$$
2. Conclure en donnant les solutions du problème (P).

Exercice 5

Le but de l'exercice est de déterminer tous les couples d'entiers $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tels que

$$2^m - 3^n = 1$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer le reste de la division euclidienne de 3^n par 8 (on distinguera les cas n pair et n impair).
2. En déduire que si $2^m - 3^n = 1$, alors $m \leq 2$.
3. Déterminer toutes les solutions de l'équation proposée.