Sup MPSI, Lycée Jean Perrin, 21 Novembre 2025.

# DS 3.

### Exercice 1

1. $x \in \mathbb{R}$ :
$$\int \frac{x^2 \, \mathrm{d}x}{x^2+2x+5} = x - \ln(x^2+2x+5) - 3/2 \arctan((x+1)/2)$$
2. $x \in \mathbb{R}$ :
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{e^x+2} = 1/2(x - \ln(e^x+2))$$

### Exercice 2

$$y(x) = 1/2 + \exp(-x^2)/2$$

### Exercice 3

Dans cet exercice, on cherche les fonctions réelles $f$ définies sur $\mathbb{R}_+^*$, 2 fois dérivables, telles que :
pour tout $x > 0$ :
$$x^2 f''(x) = -f(x)$$
problème noté $(E)$.

1. On considère donc $f$ une solution possible de $(E)$.
On pose de plus : pour $t \in \mathbb{R}$ : $F(t) = f(\exp(t))$.
   (a) On a $F'(t) = e^t f'(e^t)$ ; $F''(t) = e^t f'(e^t) + e^{2t} f''(t)$ et par suite, avec $x = e^t$ :
$$F''(t) - F'(t) + F(t) = 0$$
   (b) Sur $\mathbb{R}$ :
$$F(t) = \exp(t/2)\left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)$$
   Sur $\mathbb{R}_+^*$ :
$$f(x) = \sqrt{x}\left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right)\right)$$
2. La vérification fonctionne et donc l'ensemble des solutions de $(E)$ est l'ensemble des fonction $f$ précédentes.
3. Déterminer les solutions du problème $(P)$ suivant :
Chercher les fonctions $f$ dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $x > 0$ :
$$f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$$
Si $f$ est solution alors sur $\mathbb{R}_+^*$ :
$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} f(x)$$
$f$ est donc de la forme :
$$f(x) = \sqrt{x}\left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right)\right)$$
Dans ce cas :
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\left(\frac{\lambda+\sqrt{3}\mu}{2}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right) + \left(\frac{\mu-\sqrt{3}\lambda}{2}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right)\right)$$
$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right) - \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right)\right)$$

La vérification fonctionne si et seulement si : $\lambda = \sqrt{3}\mu$.
Les solutions sont les fonctions de la forme :

$$f(x) = \mu\sqrt{x}\left(\sqrt{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right) + \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right)\right)$$

**Exercice 4**

Dans cet exercice, on veut trouver les fonctions de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}_+^\star$ telles que :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^\star)^2,\ f(xy) = f(x) + f(y).$$

problème noté $(P)$ dans la suite.

1. Dans cette question, on note $g$ une fonction solution du problème $(P)$.
   (a) $g(1) = 2g(1)$ donc $g(1) = 0$.
   (b) Par dérivation par apport à $x$ :
   $$\forall x, y \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ y.g'(xy) = g'(x).$$
   (c) Il s'en suit en prenant $y = 1/x$ : $g'(1)/x = g'(x)$, d'où en intégrant :
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g(x) = g'(1)\ln(x).$$
2. La vérification fonctionne. Les solutions du problème $(P)$ sont les fonction proportionnelles à ln.

**Exercice 5**

Le but de l'exercice est de déterminer tous les couples d'entiers $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ tels que

$$2^m - 3^n = 1$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, le reste de la division euclidienne de $3^n$ par 8 : 1 si $n$ pair et 3 si $n$ est impair.
   Si on a une solution au problème posé avec $m \geq 3$ alors : $3^n \equiv 7[8]$.
2. De la question précédente : si $2^m - 3^n = 1$, alors $m \leq 2$.
3. En regardant les différents cas on trouve pour seules solutions :

$$2^1 - 3^0 = 1$$

$$2^2 - 3^1 = 1$$