Fiche 26 : TD du 20-11

Questions "de cours"

Soit, si n un entier naturel non nul, $P_n(X) = X^{2n} - 1$.

1. Quelles sont les racines réelles de P_n ?
2. Quelles sont les racines complexes de P_n ?
3. Donner les factorisations en facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$ du polynôme P_n.
4. Donner les décompositions en éléments simples de $1/P_n$ sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$..

Problème

Soit n un entier naturel non nul. On pose $A = (X+1)^{2n} - 1$.

1. Montrer que l'on peut écrire $A = XB$ où B est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ dont on précisera le degré, le coefficient dominant les (la ?) racines réelles et le terme constant noté b_0.
   On rappelle qu'un polynôme est factorisable par $X - \alpha$ quant il est nul en α
2. Montrer que les racines complexes de A et B sont simples. En déduire le nombre de racines complexes de B et préciser la valeur de leur produit notée Π_n.
3. Déterminer les racines complexes de B.
   On montrera qu'elles peuvent se mettre sous la forme
   $$z_k = 2i \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \exp \frac{ik\pi}{2n}$$
   avec $k \in \{1, 2, \ldots, 2n-1\}$.
4. Montrer que si $k \in \{n, \ldots, 2n-1\}$ alors $z_k = \overline{z_{2n-k}}$.
5. On pose
   $$p_n = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$$
   Montrer que $\Pi_n = (-2).2^{2n-2}p_n^2$.
6. Donner une expression simple de p_n en fonction de n.

Exercice 1

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $n \geq 1$ scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$ avec $P(0) \neq 0$.
On notera $x_1, \ldots, x_n$ ses racines dans $\mathbb{C}$.

1. Déterminer la dérivée Q' du polynôme $Q = XP$.
2. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}$ la fraction rationnelle $\dfrac{1}{XP(X)}$.
3. En considérant la fraction $\dfrac{1}{P(X)}$ (en particulier son degré) montrer que :
   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k P'(x_k)} = \frac{-1}{P(0)}$$