

## Fiche 27 : Polynômes

---

### Exercice 1

Calculer  $a^7 + b^7 + c^7$ , où  $a, b, c$  sont les racines complexes de  $P = X^3 - X + 1$ .

### Exercice 2

Soit  $P$  un polynôme unitaire à coefficients complexes de degré 4.

Montrer que les images dans le plan complexe des racines de  $P$  forment un parallélogramme si et seulement si  $P'$  et  $P^{(3)}$  ont une racine commune.

### Exercice 3

Montrer que si  $P$  est un polynôme réel ou complexe :  $(P(X) - X) | (P(P(X)) - P(X))$  et  $(P(X) - X) | (P(P(X)) - X)$

1. Dans le cas où  $P(X) - X$  est scindé à racines simples.
2. Dans le cas général (*on pourra écrire la forme développée de  $P$* ).

### Exercice 4

Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$ . Montrer que  $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$  si et seulement si  $P = aX^n$  avec  $|a| = 1$

*On pourra calculer  $|P(e^{i\theta})|^2$  pour  $\theta$  réel.*

### Exercice 5

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé. Montrer qu'il n'y a un nombre fini de polynômes réels unitaires de degré  $n$  à coefficients entiers (relatifs) ayant toutes leurs racines éventuellement complexes de module inférieur ou égal à 1.

Faire la liste de ces polynômes pour  $n = 2$ .

### Exercice 6

Déterminer les polynômes réels unitaires tel que  $P' | P$ .