

Fiche 27 : Polynômes

Exercice 1

Calculer $a^7 + b^7 + c^7$, où a, b, c sont les racines complexes de $P = X^3 - X + 1$.

Exercice 2

Soit P un polynôme unitaire à coefficients complexes de degré 4.

Montrer que les images dans le plan complexe des racines de P forment un parallélogramme si et seulement si P' et $P^{(3)}$ ont une racine commune.

Exercice 3

Montrer que si P est un polynôme réel ou complexe : $(P(X) - X)|(P(P(X)) - P(X))$ et $(P(X) - X)|(P(P(X)) - X)$

1. Dans le cas où $P(X) - X$ est scindé à racines simples.
2. Dans le cas général (*on pourra écrire la forme développée de P*).

Exercice 4

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$ si et seulement si $P = aX^n$ avec $|a| = 1$

On pourra calculer $|P(e^{i\theta})|^2$ pour θ réel.

Exercice 5

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Montrer qu'il n'y a un nombre fini de polynômes réels unitaires de degré n à coefficients entiers (relatifs) ayant toutes leurs racines éventuellement complexes de module inférieur ou égal à 1.

Faire la liste de ces polynômes pour $n = 2$.

Exercice 6

Déterminer les polynômes réels unitaires tel que $P'|P$.