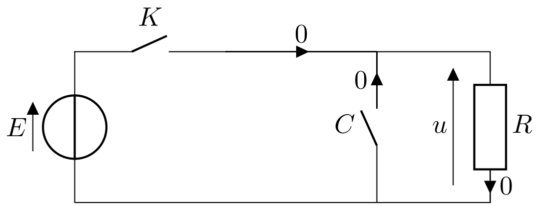
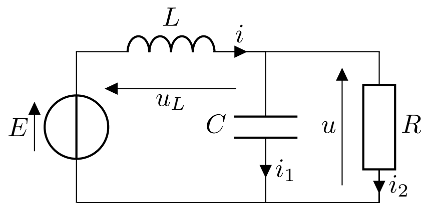
Exercice 1. Conditions initiales

1. Premier circuit

   Circuit équivalent à $t = 0^-$ (régime stationnaire)



   Circuit à $t > 0$



   À $t < 0$ il n'y a aucun courant car le circuit équivalent en régime stationnaire est ouvert. Alors $u = 0$ par la loi d'Ohm.

   Par continuité de l'intensité du courant qui traverse une bobine, $i(t = 0^+) = i(t = 0^-) = 0$. Par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur, $u(t = 0^+) = u(t = 0^-) = 0$.

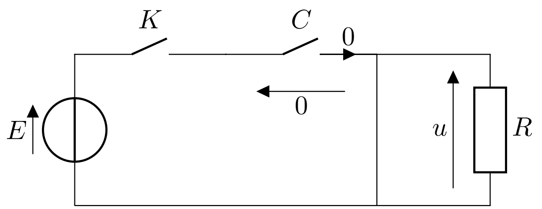
   D'après la loi d'Ohm, $i_2 = \dfrac{u}{R} = 0$ à $t = 0^+$.

   D'après la loi des nœuds, $i_1 = i - i_2 = 0$ à $t = 0^+$.

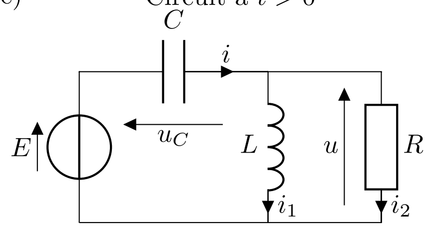
   La relation courant-tension du condensateur s'écrit $i_2 = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ donc $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t = 0^+) = 0$.

2. Deuxième circuit

   Circuit équivalent à $t = 0^-$ (régime stationnaire)



   Circuit à $t > 0$



   À $t < 0$, $u = 0$ en régime stationnaire car c'est la tension aux bornes d'un fil dans le circuit équivalent. Ainsi aucun courant ne traverse la résistance donc aucun courant ne traverse le circuit, la source nétant pas branchée.

   Par continuité de l'intensité du courant qui traverse une bobine, $i_1(t = 0^+) = i_1(t = 0^-) = 0$. Par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur, $u_C(t = 0^+) = u_C(t = 0^-) = 0$ car le condensateur est initialement déchargé.

   Pour $t > 0$, la loi des mailles s'écrit $u = E - u_C$.Donc $u(t = 0^+) = E$.

   Selon la loi d'Ohm $i_2 = \dfrac{u}{R} = \dfrac{E}{R}$ à $t = 0^+$.

   D'après la loi des nœuds, $i = i_1 + i_2 = \dfrac{E}{R}$ à $t = 0^+$.

   Or, $i_1 = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ d'où $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t = 0^+) = -E/(RC)$.

Exercice 2. Circuit LC avec générateur

1. En convention récepteur, la caractéristique de la bobine s'écrit $u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$. Or la caractéristique du condensateur s'écrit $i = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ donc $u_L = LC\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}$.

   La loi des mailles $u_L + u = E$ donne alors : $LC\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + u = E$.

   On met sous forme canonique en divisant par LC : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 E}$ avec $\boxed{\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$.

2. Par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur, $u(t = 0^+) = 0$ et par continuité du courant qui traverse une bobine, $i(t = 0^+) = 0$. Puisque $i = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$, on en déduit $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t = 0^+) = 0$.

3. La solution de l'équation homogène est la même que pour la régime libre vu en cours : $u_H(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$. Une solution particulière est $u_P(t) = E$.

   La solution générale de l'équation différentielle est donc $u(t) = u_P(t) + u_H(t) = E + A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$.

   On a aussi $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \omega_0\left(-A\sin(\omega_0 t) + B\cos(\omega_0 t)\right)$.

   On impose les deux conditions initiales : $u(t = 0^+) = E + A = 0$ d'où $A = -E$ et $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t = 0^+) = \omega_0 B = 0$ d'où $B = 0$.

   On a alors $\boxed{u(t) = E\left(1 - \cos(\omega_0 t)\right)}$ et $\boxed{i(t) = CE\omega_0\sin(\omega_0 t)}$.

4. L'énergie emmagasinée dans le condensateur est $\mathcal{E}_C = \dfrac{1}{2}Cu^2 = \dfrac{1}{2}CE^2\left(1 - \cos(\omega_0 t)\right)^2$

   L'énergie emmagasinée dans la bobine est $\mathcal{E}_L = \dfrac{1}{2}Li^2 = \dfrac{1}{2}LC^2E^2\omega_0^2\left(\sin(\omega_0 t)\right)^2 = \dfrac{1}{2}CE^2\sin^2(\omega_0 t)$ avec $\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$.

   L'énergie totale emmagasinée par ces dipôles est donc :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_{\text{tot}} = \mathcal{E}_C + \mathcal{E}_L &= \frac{1}{2}CE^2\left(1 - 2\cos(\omega_0 t) + \cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t)\right) \\
&= \frac{1}{2}CE^2\left(2 - 2\cos(\omega_0 t)\right) \text{ en utilisant l'identité remarquable trigonométrique.}
\end{aligned}
$$

Pour conclure, $\boxed{\mathcal{E}_{\text{tot}} = CE^2(1-\cos(\omega_0 t))}$.

5. La puissance reçue est la dérivée de l'énergie accumulée : $\boxed{\mathcal{P}_{\text{reçue}} = \dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\text{tot}}}{\mathrm{d}t} = CE^2\omega_0\sin(\omega_0 t)}$.

   La puissance fournie par le générateur $\boxed{\mathcal{P}_G = Ei(t) = CE^2\omega_0\sin(\omega_0 t)}$ et est effectivement égale à la puissance totale reçue par le reste du circuit.

Exercice 3. Suspension automobile

1. Soit le système (S). À l'équilibre, il est soumis :

   — à son poids $\vec{P} = M\vec{g} = -Mg\vec{e}_z$,

   — à la force de rappel du ressort $\vec{F} = -k(\ell-\ell_0)\vec{u}_{\text{ext}}$. La longueur du ressort est $\ell = z_G - z_C = z_e - R$ et le vecteur unitaire extérieur est vertical ascendant donc $\vec{F} = -k(z_e - R - \ell_0)\vec{e}_z$.

   D'après le principe fondamental de la dynamique (PFD) dans le référentiel terrestre supposé galiléen, $\vec{P} + \vec{F} = m\vec{a}_G = \vec{0}$ à l'équilibre.

   En projetant sur $\vec{e}_z$ il vient $-Mg - k(z_e - R - \ell_0) = 0$ donc $\boxed{z_e = R + \ell_0 - \dfrac{Mg}{k}}$.

2. En dehors de l'équilibre (S) est soumis :

   — à son poids $\vec{P} = -Mg\vec{e}_z$,

   — à la force de rappel du ressort $\vec{F} = -k(z_G - R - \ell_0)\vec{e}_z$,

   — ainsi qu'à la force de frottement fluide $\vec{f} = -\lambda(\vec{v}_G - \vec{v}_C) = -\lambda\dot{z}_G\vec{e}_z$ puisque C est à altitude constante sur une route horizontale.

   D'après le PFD, $\vec{P} + \vec{F} + \vec{f} = m\vec{a}_G$ où $\vec{a}_G = \ddot{z}_G\vec{e}_z$.
   En projetant sur $\vec{e}_z$, il vient : $-Mg - k(z_G - R - \ell_0) - \lambda\dot{z}_G = M\ddot{z}_G$ d'où $\boxed{\ddot{z}_G + \dfrac{\lambda}{M}\dot{z}_G + \dfrac{k}{M}z_G = \dfrac{k}{M}z_e}$.

3. Le régime transitoire critique correspond à un discriminant nul pour l'équation caractéristique $r^2 + \dfrac{\lambda}{m_0}r + \dfrac{k}{m_0} = 0$, soit $\Delta = \left(\dfrac{\lambda}{m_0}\right)^2 - 4\dfrac{k}{m_0} = 0$ d'où $\boxed{\lambda = 2\sqrt{km_0}}$.

4. Si $M = m_0 + m$, $\Delta = \left(\dfrac{\lambda}{m_0+m}\right)^2 - 4\dfrac{k}{m_0+m} = \dfrac{4km_0}{(m_0+m)^2} - 4\dfrac{k}{m_0} = -\dfrac{4km}{(m_0+m)^2} < 0$. Le régime transitoire est donc quasi-périodique.

5. Les racines de l'équation caractéristique sont $-\dfrac{\lambda}{2(m_0+m)} \pm i\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2}$. La pseudo-pulsation est $\Omega = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2} = \dfrac{\sqrt{km}}{m_0+m}$ donc la pseudo-période $\boxed{T = \dfrac{2\pi}{\Omega} = \dfrac{2\pi(m_0+m)}{\sqrt{km}}}$.

6. $\boxed{k = \dfrac{4\pi^2(m_0+m)^2}{mT^2} = 7{,}4\times10^4\ \mathrm{N\cdot m^{-1}}}$.

Exercice 4. Étude d'un circuit

1. Avant la fermeture de l'interrupteur on a un circuit RLC en régime libre. En régime permanent, toutes les grandeurs électriques y sont nulles : $i(t=0^-) = 0$ et $u(t=0^-) = 0$.
   Par continuité, elles restent nulles après fermeture : $\underline{i(t=0^+) = 0}$ et $\underline{u(t=0^+) = 0}$.

2. L'intensité i' du courant qui traverse la branche du condensateur vérifie $i' = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.

   D'après la loi des nœuds, $I_0 = i + i'$ donc $\boxed{i = I_0 - C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}}$.

   Puisque $i(t=0^+) = 0$, il vient $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t=0^+) = \dfrac{I_0}{C}}$.

3. En appliquant la loi des mailles dans la maille de droite, on a $u_L = u_R + u_C$ d'où $L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = Ri' + u = RC\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u$.
   En utilisant l'expression de i obtenue à la question précédente, on obtient l'équation différentielle pour $u(t)$: $-LC\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} = RC\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u$.
   En divisant par LC et en réorganisant les termes, on obtient l'équation différentielle sous forme canonique :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u = 0}$$

   C'est la forme canonique d'un oscillateur amorti du deuxième ordre, avec $\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$ et $\dfrac{R}{L} = \dfrac{\omega_0}{Q}$.

   On a donc $\boxed{\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}} = \underline{5{,}0\times10^3\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}}$ et $\boxed{Q = \dfrac{L\omega_0}{R} = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}} = \underline{5{,}0}$.

4. Le polynôme caractéristique associé à l'équation différentielle homogène est $P(x) = x^2 + \frac{\omega_0}{Q}x + \omega_0^2$ de discriminant $\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = -4\omega_0^2\left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right) < 0$.

   Les deux racines dont des complexes conjugués : $r = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm i\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = -\frac{1}{\tau} \pm i\Omega$

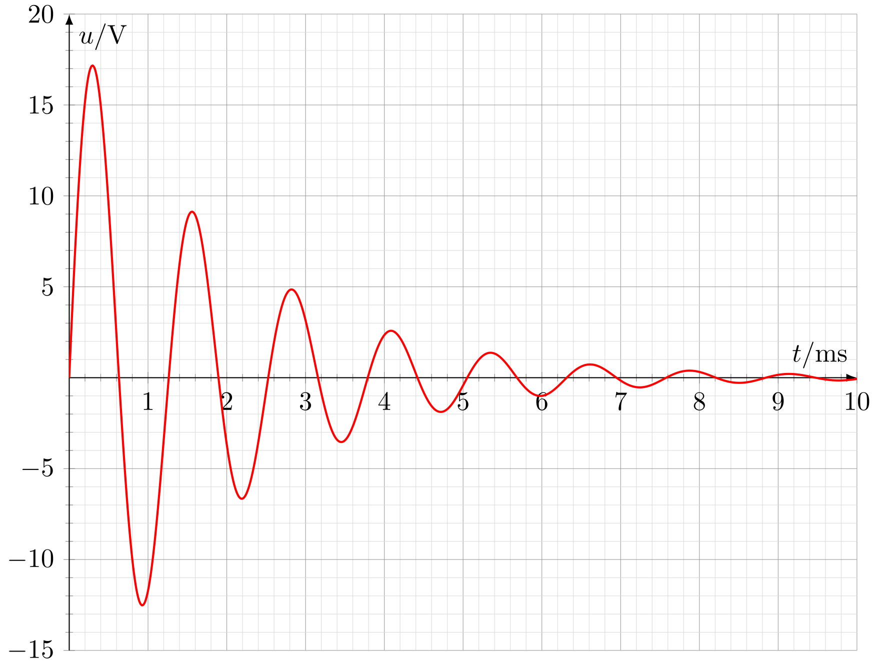
   avec $\boxed{\tau = \frac{2Q}{\omega_0} = \frac{2L}{R}} = \underline{2{,}0\,\mathrm{ms}}$ et $\boxed{\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} = \underline{4975\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}}$.

   La solution générale de l'équation différentielle (qui est homogène) est alors $\boxed{u(t) = e^{-t/\tau}\left(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right)}$.

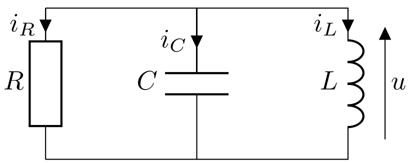
   La dérivée est $\boxed{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = e^{-t/\tau}\left((B\Omega - A/\tau)\cos(\Omega t) - (A\Omega + B/\tau)\sin(\Omega t)\right)}$.

   On impose les conditions initiales : $u(t = 0^+) = A = 0$ et $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t = 0^+) = B\Omega - A/\tau = \frac{I_0}{C}$ donc $B = \frac{I_0}{C\Omega} = kRI_0$ avec $k = \frac{1}{RC\Omega}$. Or $RC = LC \times \frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{Q} \times \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{1}{Q\omega_0}$ donc $k = \frac{\omega_0 Q}{\omega_0\sqrt{1 - 1/(4Q^2)}} = \frac{Q}{\sqrt{1 - 1/(4Q^2)}} = 5{,}0$.

   Pour conclure, la solution est : $\boxed{u(t) = \frac{Q}{\sqrt{1 - 1/(4Q^2)}}RI_0 e^{-t/\tau}\sin(\Omega t)}$ (ci-contre).



Exercice 5. Circuit RLC parallèle



1. En régime stationnaire la bobine est équivalente à un fil donc $\underline{u = 0}$. Puisque c'est la tension aux bornes du résistor, le courant qui le traverse $\underline{i_R = u/R = 0}$. Le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert donc le courant qui le traverse $\underline{i_C = 0}$. D'après la loi des nœuds le courant qui traverse la bobine $\underline{i_L = I_0}$.
2. A $t > 0$, le circuit est représenté ci-dessus. La loi des nœuds s'écrit $i_R + i_C + i_L = 0$. On la dérive, alors $\frac{\mathrm{d}i_R}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}i_C}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = 0$.

   Puisque $u_R = Ri$, $\frac{\mathrm{d}i_R}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$. De plus $i_C = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ donc $\frac{\mathrm{d}i_C}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}$. Enfin, $u = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$ donc $\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = u/L$.

   En conclusion, on obtient l'équation différentielle $\boxed{\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + C\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{u}{L} = 0}$.
3. On met cette équation sous forme canonique : $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + (1/RC)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + (1/LC)u = 0$.

   On identifie la pulsation propre $\boxed{\omega_0 = 1/\sqrt{LC}} = \underline{1{,}00 \times 10^4\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}}$.

   Le facteur de qualité est tel que $\omega_0/Q = 1/(RC)$ d'où $\boxed{Q = RC\omega_0 = R\sqrt{C/L}} = \underline{0{,}500}$. Le régime transitoire est donc critique.
4. La solution générale de l'équation homogène est $u(t) = (A + Bt)e^{-\omega_0 t}$.

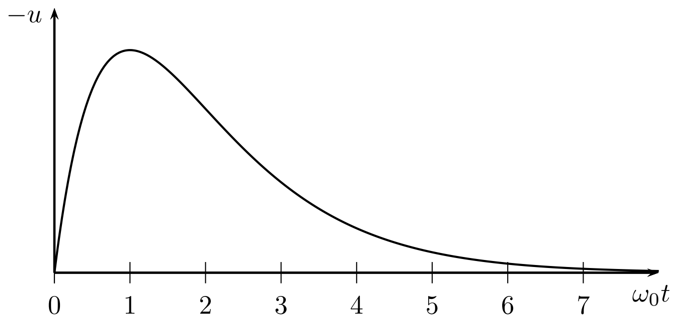
   On détermine A et B à l'aide des conditions initiales sur u et $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.

   Par continuité de la tension aux bornes du condensateur, $u(0^+) = 0$. Or $u(0^+) = A$ si bien que $A = 0$.

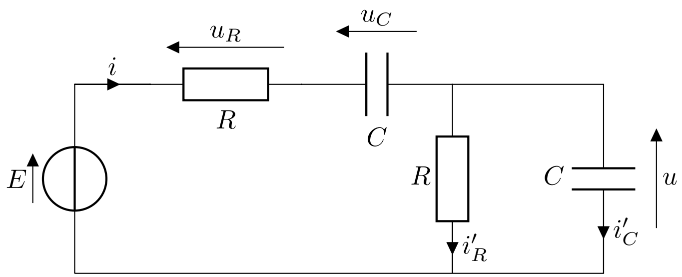
   De plus $i_R(0^+) = u(0^+)/R = 0$ et $i_L(0^+) = I_0$ par continuité du courant traversant la bobine. On en déduit que $i_C(0^+) = -I_0$. $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = i_C/C$ donc $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+) = -I_0/C$.

   Or $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = (B - B\omega_0 t)e^{-\omega_0 t}$ d'où $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+) = B$ si bien que $B = -I_0/C$.

En conclusion, $\boxed{u = -(I_0 t/C)e^{-\omega_0 t}}$.



Exercice 6. Circuit RC série/RC parallèle



1. D'après la loi des nœuds, le courant i sortant du générateur est tel que $i = i'_R + i'_C = u/R + C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.
   D'après la loi des mailles, $E = u_R + u_C + u$.
   On dérive : $0 = \dfrac{\mathrm{d}u_R}{\mathrm{d}t} + \dot{u_C}t + \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.
   Or, $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ et $u_R = Ri$ donc on obtient $0 = R\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + i/C + \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.
   En remplaçant par l'expression de i, il vient : $0 = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + RC\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + u/(RC) + \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = RC\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + 3\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u/(RC)$.
   On met cette équation sous forme canonique : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + (3/\tau)\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u/\tau^2 = 0}$.
2. $\boxed{\omega_0 = 1/\tau}$ et $\omega_0/Q = 3/\tau$ donc $\underline{Q = \omega\tau/3 = 1/3}$. Le régime transitoire est donc apériodique.
3. Initialement les condensateurs sont déchargés en l'absence de générateur donc $u_C(0^+) = 0$ et $\underline{u(0^+) = 0}$.
   A $t = 0^+$, la loi des mailles s'écrit $E = u_R(0^+) + u_C(0^+) + u(0^+) = Ri(0^+)$. Ainsi $i(0^+) = E/R$ d'où $u(0^+)/R + C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+) = E/R$ si bien que $\underline{\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+) = E/(RC) = E/\tau}$.
4. Le polynôme caractéristique est $r^2 + 3\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = 5\omega_0^2$ donc les racines sont $r = (-3\omega_0 \pm \sqrt{5}\omega_0)/2 = (-3 \pm \sqrt{5})/(2\tau)$.
   La solution générale est $u(t) = Ae^{(-3+\sqrt{5})t/(2\tau)} + Be^{(-3-\sqrt{5})t/(2\tau)}$.
   $u(0^+) = A + B = 0$ donc $u(t) = A\left(e^{(-3+\sqrt{5})t/(2\tau)} - e^{(-3-\sqrt{5})t/(2\tau)}\right)$.
   Alors $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = A\left(\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2\tau}e^{(-3+\sqrt{5})t/(2\tau)} - \dfrac{-3-\sqrt{5}}{2\tau}e^{(-3-\sqrt{5})t/(2\tau)}\right)$.
   Ainsi $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+) = A\dfrac{2\sqrt{5}}{2\tau} = \dfrac{E}{\tau}$ donc $A = \dfrac{E}{\sqrt{5}}$.
   En conclusion :

$$\boxed{u(t) = \frac{E}{\sqrt{5}}\left(e^{-(3-\sqrt{5})t/(2\tau)} - e^{-(3+\sqrt{5})t/(2\tau)}\right)}$$