[Méthode] Séparation de variables

Principe

Soit une équation différentielle du premier ordre se mettant sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = f(t)\, g(x(t))$$

On cherche la solution de cette équation soumise à la condition de Cauchy $x(t_0) = x_0$.

Une méthode de résolution consiste à séparer les variables t et x, en écrivant l'équation sous la forme :

$$\frac{1}{g(x)}\mathrm{d}x = f(t)\mathrm{d}t$$

puis en intégrant entre un état initial (t_0, x_0) et état quelconque (t, x) :

$$\boxed{\int_{x_0}^{x} \frac{1}{g(\tilde{x})}\mathrm{d}\tilde{x} = \int_{t_0}^{t} f(\tilde{t})\mathrm{d}\tilde{t}}$$

Justification : la notation de Leibniz pour la dérivée, $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, permet cette séparation de manière naturelle. De façon plus rigoureuse, on montre que cette séparation revient à effectuer un changement de variables dans l'intégrale :

$$f(t) = \frac{x'(t)}{g(x(t))} \quad \text{d'où} \quad \int_{t_0}^{t} f(\tilde{t})\,\mathrm{d}\tilde{t} = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{g(x(t))}x'(\tilde{t})\,\mathrm{d}\tilde{t} = \int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{1}{g(\tilde{x})}\,\mathrm{d}\tilde{x} \qquad \text{avec le changement de variable } \tilde{x} = x(\tilde{t})$$

Application à la cinétique chimique

En cinétique chimique, on étudie le cas simple décrivant une cinétique d'ordre 0, 1 ou 2 avec $x(t)$ la concentration d'un réactif :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -k\, x^n(t) \text{ où } n = 0, 1, 2 \text{ et la condition initiale } x(0) = x_0$$

On a alors :

$$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{\tilde{x}^n}\mathrm{d}\tilde{x} = \int_{0}^{t} (-k)\,\mathrm{d}\tilde{t} = -kt$$

Cas $n = 0$: $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}\tilde{x} = x - x_0 = -kt$ d'où $\boxed{x(t) = x_0 - kt}$.

Cas $n = 1$: $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{1}{\tilde{x}}\,\mathrm{d}\tilde{x} = \ln(x) - \ln(x_0) = -kt$ d'où $\boxed{x(t) = x_0 \exp(-kt)}$.

Cas $n = 2$: $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{1}{\tilde{x}^2}\,\mathrm{d}\tilde{x} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x_0} = -kt$ d'où $\boxed{x(t) = \dfrac{x_0}{1 + x_0 kt}}$.

Application à la mécanique

Soit un système en chute dans l'air sans vitesse initiale et soumis à un frottement visqueux proportionnel au carré de la vitesse. L'équation différentielle vérifiée par la vitesse se met sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a_0\left(1 - \frac{v^2}{v_\infty^2}\right)$$

où a_0 est l'accélération initiale et v_∞ la vitesse limite.
Par séparation de variables :

$$\begin{aligned}
& \int_0^v \frac{\mathrm{d}\tilde{v}}{1 - \tilde{v}^2/v_\infty^2} = \int_0^t a_0\,\mathrm{d}\tilde{t} \\
\Leftrightarrow\quad & v_\infty \int_0^{v/v_\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1 - x^2} = a_0\, t \quad \text{où on a posé } x = \frac{v}{v_\infty} \\
\Leftrightarrow\quad & v_\infty \,\mathrm{argth}\left(\frac{v}{v_\infty}\right) = a_0\, t \quad \text{où argth est la réciproque de la fonction tangente hyperlique} \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{v}{v_\infty} = \tanh\left(\frac{a_0\, t}{v_\infty}\right) \\
\Leftrightarrow\quad & \boxed{v(t) = v_\infty \tanh(t/\tau)} \quad \text{en posant } \tau = \frac{v_\infty}{a_0} \text{ la durée caractéristique de la chute}
\end{aligned}$$