

Fiche 28 : Fractions rationnelles

Exercice 1

1. Déterminer la factorisation réelle et la factorisation complexe du polynôme : $P = X^3 + 1$.
2. En déduire la décomposition en éléments simples sur \mathbb{R} de la fraction : $\frac{1}{X^3 + 1}$
3. En déduire un calcul de primitive :

$$\int \frac{x^3 \, dx}{x^3 + 1}$$

On précisera le domaine de validité du calcul fait.

Exercice 2

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{X(X+1)(X+2)}$.
2. En déduire la limite de la suite (S_n) suivante : $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Exercice 3

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

1. $\frac{1}{X^3 - X}$	2. $\frac{X^2 + 2X + 5}{X^2 - 3X + 2}$	3. $\frac{X^3}{(X-1)(X-2)(X-3)}$
4. $\frac{2X^2 + 1}{(X^2 - 1)^2}$	5. $\frac{X^3 + 1}{(X-1)^3}$	6. $\frac{X^4 + 1}{(X+1)^2(X^2 + 1)}$

Exercice 4

Décomposer en éléments simples $F = \frac{1}{(X-1)(X-2)}$ puis F^2 .

Exercice 5

Décomposer en éléments simples dans \mathbb{R} : $F = \frac{X^3}{X^3 + X^2 + X + 1}$.

En déduire pour $x > -1$ une primitive de $F(x)$.