Fiche 29 : Td du 4-12

Exercice 1

Soit :

$$Q(X) = X^4 + 12X - 5$$

On note x_1, x_2, x_3, x_4 les racines de Q.
On sait que $x_1 + x_2 = 2$.
Déterminer les factorisations dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ de Q.

Exercice 2

Factoriser le polynôme

$$P(X) = 2X^3 - X^2 - X - 3$$

en produit d'irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ sachant qu'il admet une racine rationnelle.

Exercice 3

Pour tout entier naturel n et tout $x \in [-1, 1]$, on pose :

$$P_n(x) = \cos(2n \arcsin(x))$$

1. Calculer pour $x \in [-1, 1]$: $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$ (on les écrira sous forme d'expressions polynômiales).
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [-1, 1]$:

   $$P_{n+2}(x) + P_n(x) = 2(1 - 2x^2)P_{n+1}(x)$$

   (On pourra calculer l'expression $\cos(a + b) + \cos(a - b)$).
3. En déduire que pour tout entier n, la fonction P_n est polynômiale, paire et préciser son degré, son coefficient dominant et son terme constant.
4. Montrer que P_n est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ en déterminant ses racines. (On pourra les chercher sous la forme $\sin(\theta)$).
5. Déduire des calculs précédents :

   $$\Pi_n = \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{4n}\right)$$

6. Pour tout entier n, en revenant à la définition de P_n, montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$:

   $$(x^2 - 1)P_n''(x) + xP_n'(x) = 4n^2 P_n(x)$$

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P(X) = (X - a_1) \cdots (X - a_n)$ (où les a_i sont des nombres complexes).

1. Exprimer à l'aide de P et de ses dérivées les sommes suivantes :

   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X - a_k} \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(X - a_k)^2} \qquad \sum_{\substack{1 \leq k, \ell \leq n \\ k \neq \ell}} \frac{1}{(X - a_k)(X - a_\ell)}$$

2. Montrer que si z est racine de P' mais pas de P, alors il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des réels positifs ou nuls tels que

   $$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1 \quad \text{et} \qquad z = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k$$

   Si toutes les racines de P sont réelles, que peut-on en déduire sur les racines de P' ?