

Fiche 30 : Nombres réels

Exercice 1

Soit

$$I = \left\{ x \in \mathbb{R}^* \mid -2 < x + \frac{1}{2x} \leq 2 \right\}.$$

1. Montrer que I est la réunion de deux intervalles.
2. Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, le plus grand élément, le plus petit élément de I .

Exercice 2

On considère une suite de réels strictement positifs $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow l \in [0, +\infty]$

1. Montrer que si $l < 1$ alors : $u_n \rightarrow 0$.
2. Montrer que si $l > 1$ alors : $u_n \rightarrow +\infty$.
3. Montrer que le cas $l = 1$ présente une indétermination.

Exercice 3

Déduire de l'exercice précédent la limite de la suite :

$$v_n = \frac{a^n}{n!}$$

($a > 1$ est un réel fixé)

Exercice 4

Étant donné un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ non vide et m un réel, écrire avec des quantificateurs les propriétés suivantes. Donner un exemple de chaque cas :

1. m est un minorant de A ,
2. m n'est pas un majorant de A ,
3. A est majoré,
4. A n'est pas minoré,
5. A est borné,
6. A n'est pas borné.