Chapitre P8

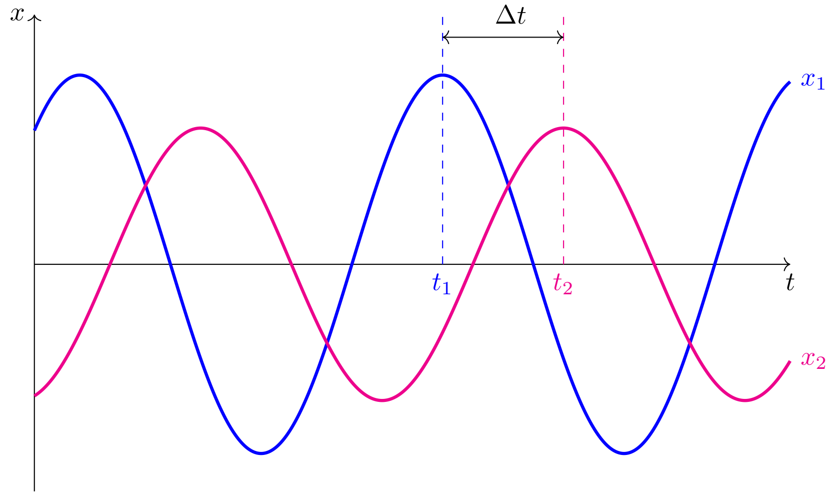
Oscillateurs en Régime Sinusoïdal Forcé

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
Impédances complexes.	Établir et connaître l'impédance d'une résistance, d'un condensateur, d'une bobine.
Association de deux impédances.	Remplacer une association série ou parallèle de deux impédances par une impédance équivalente.
Oscillateur électrique ou mécanique soumis à une excitation sinusoïdale. Résonance.	Utiliser la représentation complexe pour étudier le régime forcé. Relier l'acuité d'une résonance au facteur de qualité. Déterminer la pulsation propre et le facteur de qualité à partir de graphes expérimentaux d'amplitude et de phase. *Capacité expérimentale : mettre en uvre un dispositif expérimental visant à caractériser un phénomène de résonance.*

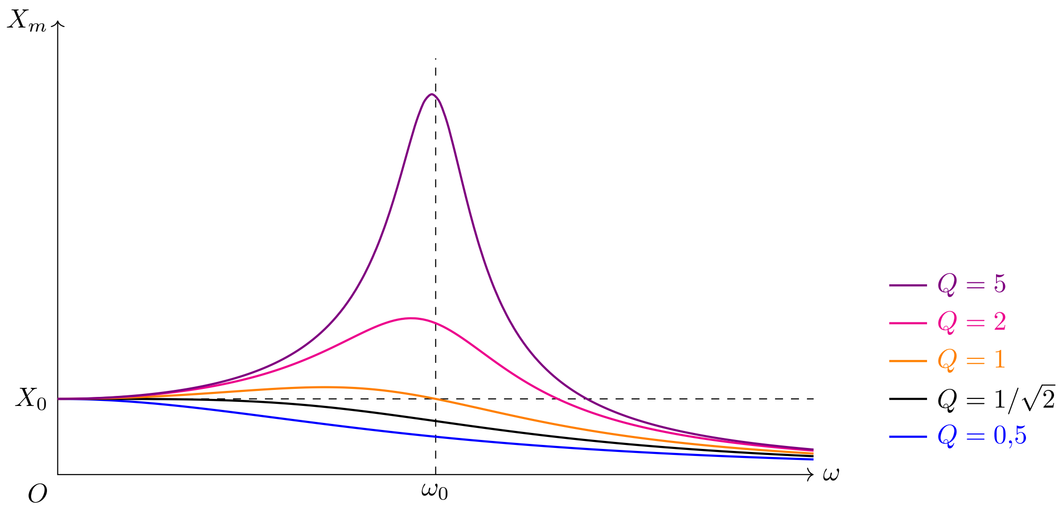
Questions de cours

- Expliquer le principe de la représentation complexe en régime sinusoïdal forcé : définir la grandeur complexe associée à une grandeur réelle, indiquer l'action d'une dérivée temporelle.
- Définir le déphasage entre deux signaux sinusoïdaux de même pulsation et l'exprimer en fonction des amplitudes complexes. Relier le déphasage au décalage temporel entre les signaux.
- Établir l'impédance d'une résistance, d'un condensateur, d'une bobine.
- Établir l'expression de l'amplitude de la tension aux bornes du condensateur pour un circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé en utilisant la notation complexe.
- Donner sans démonstration la forme de la courbe de résonance en intensité dans le circuit RLC série, et indiquer ses caractéristiques principales : pulsation de résonance, définition de l'acuité et expression en fonction du facteur de qualité.

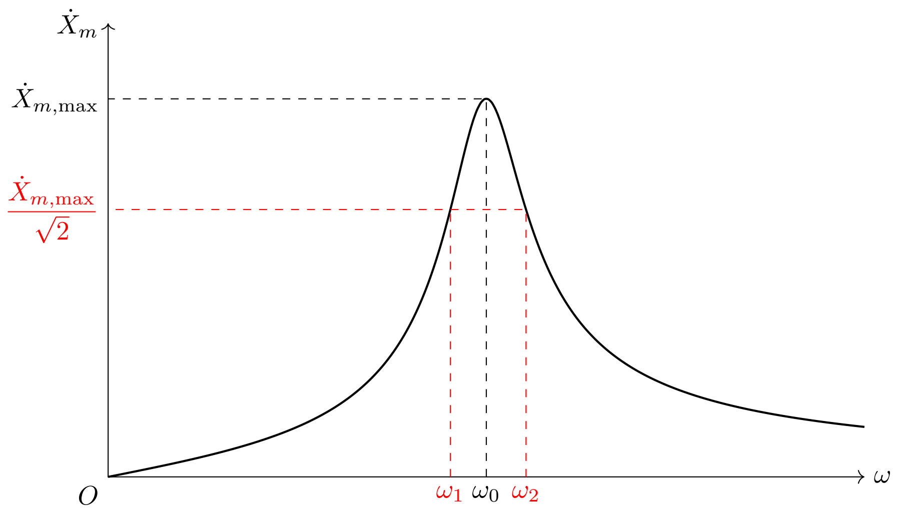
Document 1. Déphasage



Document 2. Résonance en élongation / tension



Document 3. Résonance en vitesse / intensité



Exercice de cours A. Système du premier ordre en RSF

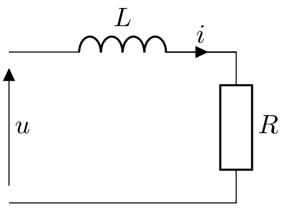
Soit un système physique régi par l'équation différentielle pour la grandeur $x(t)$:

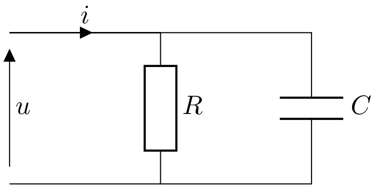
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{x}{\tau} = f(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

1. Écrire l'équation vérifiée par l'amplitude complexe $\underline{X}$ de $x(t)$ en RSF à la pulsation ω.
2. En déduire l'amplitude $X_m(\omega)$ de $x(t)$, ainsi que le déphasage $\Delta\varphi$ de $x(t)$ par rapport à $f(t)$.

Exercice de cours B. Impédances équivalentes

1. Déterminer l'impédance équivalente des dipôles ci-dessous, en régime sinusoïdal forcé à la pulsation ω.
2. En déduire la relation entre les amplitudes de i et de u, ainsi que le déphasage de u par rapport à i.





Exercice de cours C. Circuit RLC série en RSF

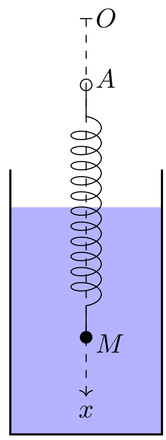
Soit un circuit RLC série alimenté par une source idéale de tension $e(t) = E\cos(\omega t + \varphi_e)$. On se place en régime sinusoïdal forcé.

1. Représenter le circuit.
2. Exprimer la représentation complexe de la tension aux bornes du condensateur $\underline{u}_C$, sous la forme :

$$\underline{u}_C = \frac{\underline{e}}{1 + j\dfrac{\omega}{Q\omega_0} - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

   Identifier la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q dans cette expression.
3. Même question pour la tension aux bornes de la résistance.

Exercice de cours D. Oscillateur vertical excité



On considère un solide M assimilé à un point matériel de masse m suspendue à un ressort vertical de raideur k et de longueur à vide ℓ_0.Le solide est immergé dans l'eau qui exerce sur lui une force de frottement fluide $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$ avec $\vec{v}$ la vitesse du solide. Un moteur rotatif met en mouvement l'extrémité supérieure A du ressort, lui imposant des oscillations sinusoïdales d'amplitude a et de fréquence f autour de l'origine O du repère cartésien associé au référentiel du laboratoire : on a ainsi $\overrightarrow{OA}(t) = a\cos(2\pi f t)\vec{e}_x$ avec $\vec{e}_x$ orienté vers le bas. On note $\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{e}_x$.

1. Exprimer la longueur du ressort à l'instant t.
2. Établir l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$.
3. Déterminer la solution en régime sinusoïdal établi en utilisant la notation complexe. Mettre l'amplitude complexe $\underline{X}_m$ du mouvement sous la forme :

$$\underline{X}_m = \frac{X_0}{1 + j\dfrac{\omega}{Q\omega_0} - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

   Identifier la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q dans cette expression, ainsi que la constante X_0.
4. En déduire l'expression de l'amplitude complexe de la vitesse $\underline{V}_m$.

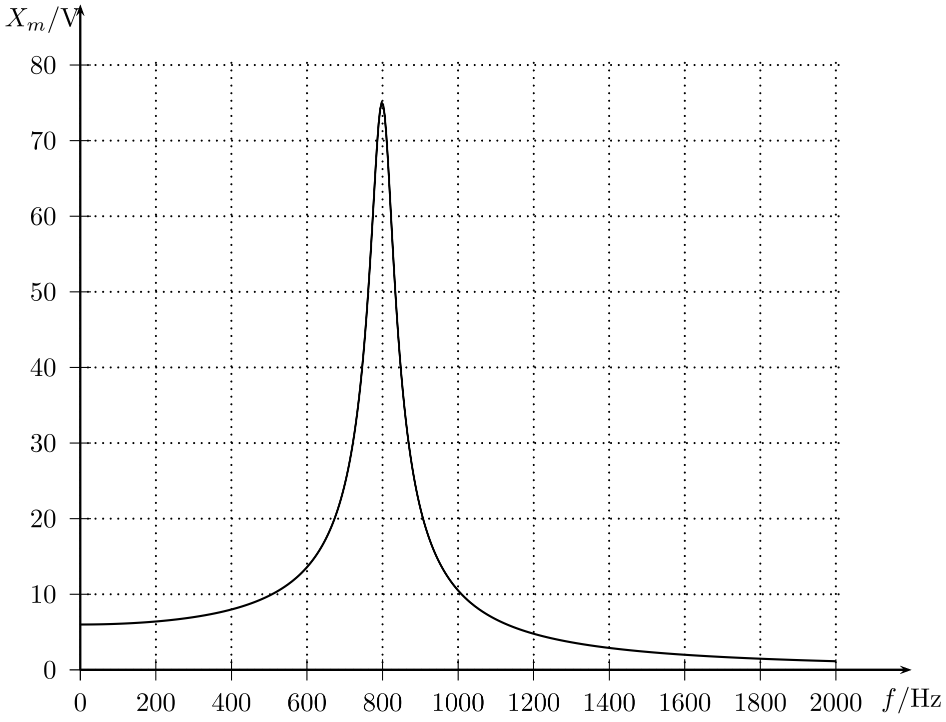
Exercice de cours E. Résonance à facteur de qualité élevé

On étudie un oscillateur en régime sinusoïdal forcé. L'amplitude X_m de la réponse de l'oscillateur (de type élongation ou tension) dépend de la fréquence selon l'expression :

$$X_m(f) = \frac{X_0}{\sqrt{(1-x^2)^2 + (x/Q)^2}}$$

où $x = f/f_0 = \omega/\omega_0$ est la fréquence (ou pulsation) réduite avec f_0 la fréquence propre de l'oscillateur, Q est son facteur de qualité et X_0 est l'amplitude de la source excitatrice.

1. Exprimer $X_m(0)$.
2. On suppose Q très élevé. Déterminer la fréquence réduite de résonance et l'amplitude à la résonance.
3. On a obtenu la courbe suivante pour $X_m(f)$ lors d'une expérience. Justifier que le facteur de qualité y est très élevé. Déterminer graphiquement sa valeur ainsi que celle de la pulsation propre.



Exercice 1. Étude d'une bobine réelle (★)

Une bobine réelle est modélisée par l'association série d'une inductance L et d'une résistance r. Pour déterminer ces grandeurs, on réalise les expériences suivantes :

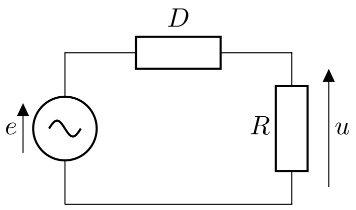
— lorsqu'on alimente la bobine par une source idéale de tension de f.e.m. $E = 6{,}0\,\mathrm{V}$, elle est parcourue par un courant d'intensité $I = 0{,}69\,\mathrm{A}$;

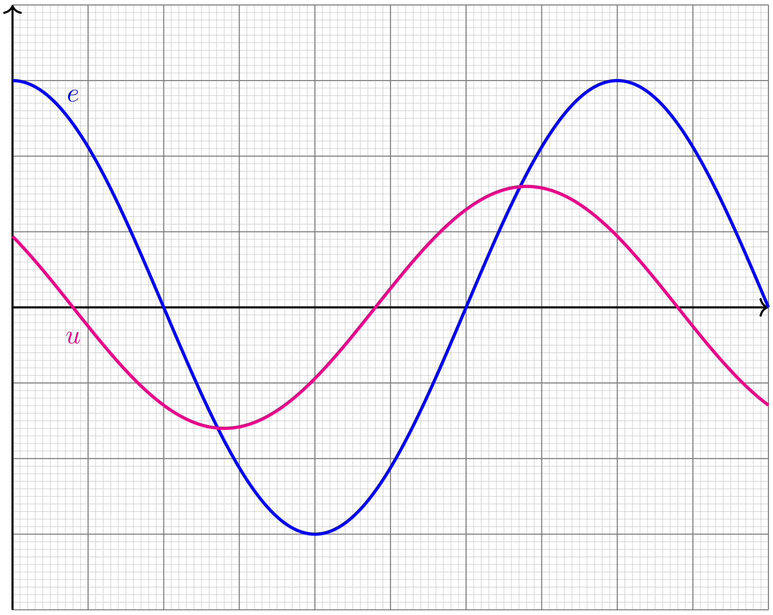
— lorsqu'on alimente la bobine par une tension sinusoïdale de fréquence $f = 50\,\mathrm{Hz}$ et d'amplitude $U_m = 8{,}5\,\mathrm{V}$, elle est parcourue par un courant d'amplitude $I_m = 0{,}23\,\mathrm{A}$.

1. Déterminer les valeurs de r et L.
2. Calculer le déphasage de l'intensité du courant par rapport à la tension d'alimentation à 50 Hz.

Exercice 2. Etude d'un dipôle inconnu (★★)

Afin de déterminer les caractéristiques d'un dipôle D inconnu, on réalise le circuit suivant où la résistance $R = 470\,\Omega$ et le GBF émet une tension sinusoïdale. On visualise à l'oscilloscope les tensions aux bornes du générateur $e(t)$ et aux bornes du résistor $u(t)$. La base de temps est de 10 µs par division et l'échelle des tensions est de 2 V par division.





1. Donner l'expression de l'amplitude complexe $\underline{u}$ en fonction de $\underline{e}$, R et de l'impédance $\underline{Z}$ du dipôle D.
2. En déduire l'expression des parties réelle et imaginaire du rapport $\dfrac{\underline{e}}{\underline{u}}$, en fonction de R et des parties réelle et imaginaire de $\underline{Z} = Z_r + jZ_i$.
3. Déterminer graphiquement la valeur de la fréquence du GBF, les amplitudes des deux tensions ainsi que le déphasage de e par rapport à u.
4. En déduire les valeurs numériques de la partie réelle et la partie imaginaire de $\underline{Z}$.
5. Proposer une association de dipôles simples permettant de réaliser cette impédance. On précisera la valeur de leurs caractéristiques.

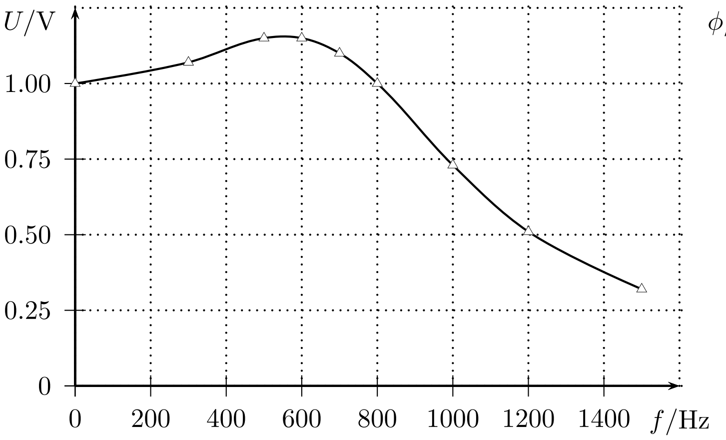
Exercice 3. Résonance floue (★★)

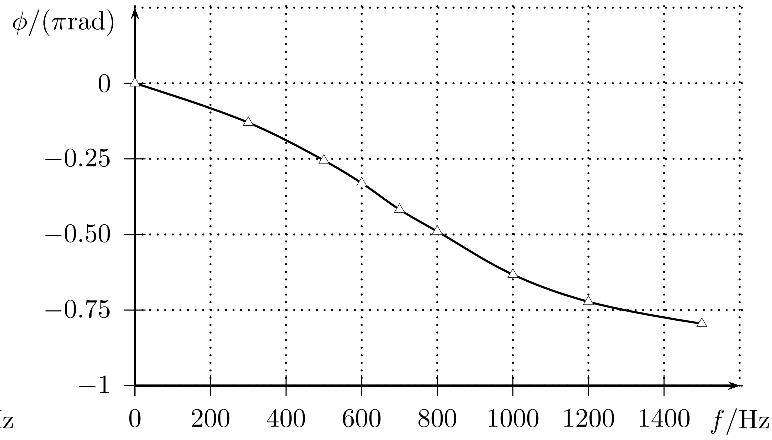
On étudie un circuit RLC-série où $C = 800\,\mathrm{nF}$, alimenté par un générateur délivrant un signal sinusoïdal $e(t)$ de fréquence f variable. On mesure l'amplitude U de la tension u aux bornes du condensateur, ainsi que le déphasage ϕ entre $u(t)$ et $e(t)$. On obtient les graphes ci-dessous.

On rappelle que dans ce cas, les représentations complexes de $u(t)$ et $e(t)$ sont liées par la relation :

$$\underline{u} = \frac{\underline{e}}{1 + jx/Q - x^2} \quad \text{avec } x = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0} \quad \text{où } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ et } Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

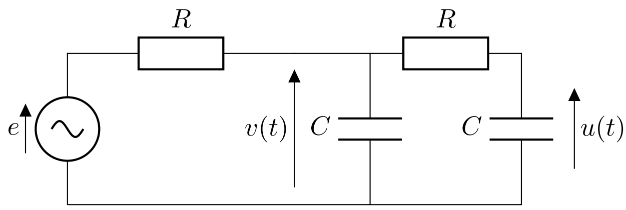
1. Donner les expressions de l'amplitude et du déphasage à la fréquence propre f_0 du circuit.
2. En déduire les valeurs de f_0 et du facteur de qualité.
3. En déduire les valeurs de L et R.
4. Déterminer la fréquence de résonance f_r et l'amplitude maximale de U. Les résultats sont-ils conformes à l'expérience ?





Exercice 4. Étude d'un circuit en RSF (★★)

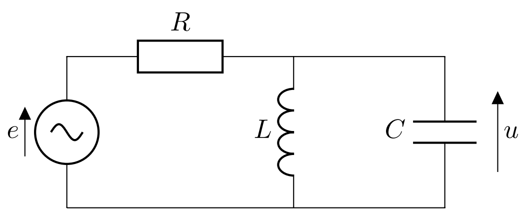
Soit le circuit ci-dessous en régime sinusoïdal forcé.



1. Exprimer le rapport $\dfrac{\underline{u}}{\underline{v}}$.
2. Quelle est l'impédance du dipôle aux bornes ayant la tension v à ses bornes ? Exprimer le rapport $\dfrac{\underline{v}}{\underline{e}}$.
3. En déduire la relation entre $\underline{u}$ et $\underline{e}$.
4. Quelle est l'équation différentielle vérifiée par la tension $u(t)$?

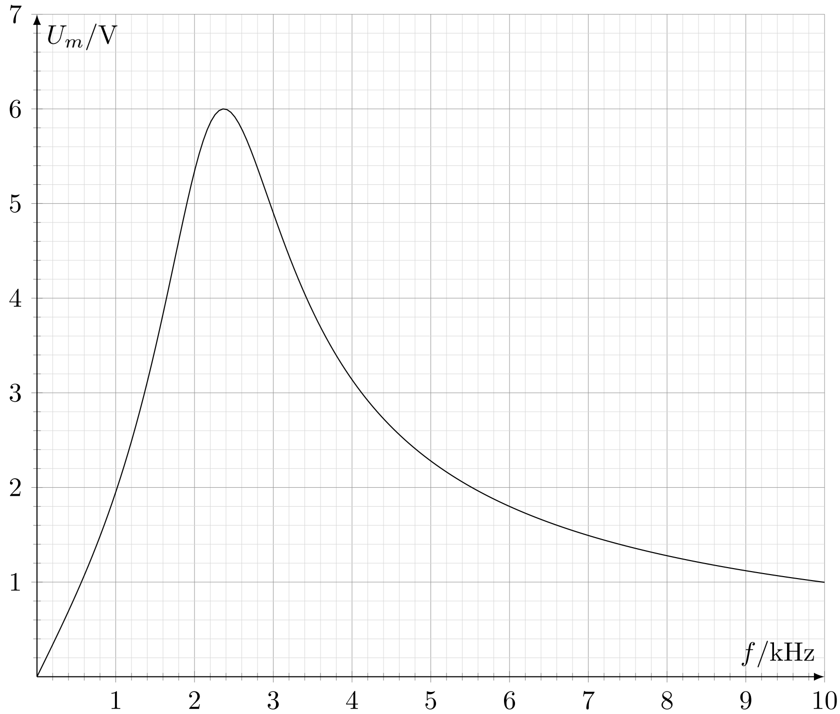
Exercice 5. Circuit R-LC (★★)

On considère le circuit représenté ci-dessous, composé d'un résistor de résistance $R = 1\,\mathrm{k}\Omega$, d'une bobine idéale d'inductance L, d'un condensateur de capacité C, alimenté par une source idéale de tension, de f.e.m. e sinusoïdale d'amplitude $E = 6\,\mathrm{V}$ et de fréquence f variable.



On mesure l'amplitude de la tension u en fonction de la fréquence f, et on obtient le graphe ci-dessous.

1. Déterminer l'amplitude U_m de la tension u, en fonction de E, R, L, C et $\omega = 2\pi f$.
2. Montrer qu'il y arésonance et donner l'expression de la fréquence de résonance en fonction de L et C.
3. Exprimer les pulsations $\omega_i = 2\pi f_i$ $(i = 1, 2)$ telles que $U_m(\omega_i) = \dfrac{U_{m,\max}}{\sqrt{2}}$. En déduire la largeur de résonance $\Delta f = f_2 - f_1$ en fonction de R et C.
4. Déterminer graphiquement la fréquence et la largeur de la résonance.
5. En déduire les valeurs de L et C.



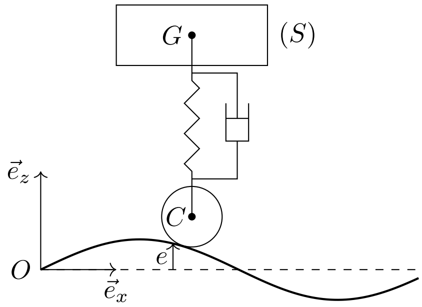
Exercice 6. Suspension automobile sur route ondulée (★★★)

Cet exercice reprend l'exercice 3 du chapitre précédent, mais dans le cas où la route n'est plus horizontale.

On considère le système (S) formé par le quart de la voiture, de centre d'inertie G et de masse m, reposant sur une roue de centre C et de rayon R par l'intermédiaire de la suspension dont l'axe CG reste toujours vertical. On supposera que (S) n'est pas couplé avec le reste de l'automobile.

La suspension est modélisée par un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0, et un amortisseur fluide qui exerce sur la voiture une force de frottement $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$ où $\vec{v} = \vec{v}_G - \vec{v}_C$ désigne la vitesse ascensionnelle de la voiture relativement à l'axe de la roue et λ est un coefficient de frottement fluide.

La route est rectiligne dans la direction $\vec{e}_x$, mais a un profil vertical selon $\vec{e}_z$ qui peut varier. On note e l'altitude du sol par rapport à un niveau moyen. On note z l'altitude de G par rapport à ce niveau moyen.



Données : $m = 375\,\mathrm{kg}$; $k = 7{,}4 \times 10^4\,\mathrm{N \cdot m^{-1}}$; $\lambda = 9{,}4 \times 10^3\,\mathrm{kg \cdot s^{-1}}$.

1. Le véhicule étant immobile sans freins sur un sol horizontal à l'altitude $e = 0$, exprimer la valeur de z notée z_e.

2. Établir l'équation du mouvement vertical de G en dehors de l'équilibre. On néglige le décalage angulaire du point de contact pneu-route par rapport à la verticale.
   Montrer que cette équation se met sous la forme :

   $$\ddot{z} + \alpha\dot{z} + \beta z = f(t)$$

   où on exprimera α, β en fonction de k, m et λ, et la fonction du temps $f(t)$ en fonction de $e(t)$, $\dot{e}(t)$, z_e, α et β.

   Le sol est supposé onduler sinusoïdalement autour du niveau moyen le long de la direction x suivant la relation $e = e_m \cos(\gamma x)$.
3. Quelle est la distance L entre deux bosses successives exprimée en fonction de γ ? Quelle est la pulsation ω des oscillations verticales imposées aux roues si le véhicule roule sur cette route à une vitesse horizontale constante V ?

   Dans toute la suite on se place en régime sinusoïdal forcé (RSF) à la pulsation ω. On note $s = z - z_e$ et on utilise la notation complexe usuelle en RSF.
4. Exprimer l'amplitude complexe de s sous la forme :

   $$\underline{S} = e_m \frac{1 + \dfrac{j\Omega}{Q}}{1 - \Omega^2 + \dfrac{j\Omega}{Q}}$$

   où $\Omega = \dfrac{\omega}{\omega_0}$ est la pulsation réduite, ω_0 et Q étant des constantes que l'on exprimera en fonction de α et β, puis de λ, k et m.
5. En déduire l'amplitude S_m des oscillations en fonction de Ω et Q. Donner sa limite lorsque $\Omega \to 0$ et $\Omega \to \infty$.
6. On montre qu'il y a résonance pour une pulsation réduite $\Omega_r = Q\sqrt{\sqrt{1 + \dfrac{2}{Q^2}} - 1}$. Déterminer sa valeur et tracer l'allure du graphe donnant $\dfrac{S_m}{e_m}$ en fonction de Ω.
7. Si la distance entre deux bosses successives est $L = 10\,\text{m}$, à quelle vitesse se produit la résonance ? Commenter.

Réponses

Exercice 1 : 1.$r = 8{,}7\,\Omega$; $L = 0{,}12\,\text{H}$; 2. $\Delta\varphi_{i/u} = -1{,}3\,\text{rad}$.

Exercice 2 : 3. $f = 12,5kHz$; $\Delta\varphi_{e/u} = -3\pi/10$; 4. $Z_r = 48\,\Omega$; $Z_i = -713\,\Omega$.

Exercice 3 : 1. $U(f_0) = QE$; $\Delta\varphi_{u/e}(f_0) = -\pi/2$; 2. $f_0 = 800\,\text{Hz}$; $Q = 1$; 3. $L = 49\,\text{mH}$; $R = 249\,\Omega$; 4. $f_r = 566\,\text{Hz}$; $U_{\max} = 1{,}15\,\text{V}$.

Exercice 4 : 3. $\dfrac{\underline{u}}{\underline{e}} = \dfrac{1}{1 + 3jRC\omega + (jRC\omega)^2}$.

Exercice 5 : 1. $U_m = \dfrac{E}{\sqrt{1 + R^2 \times \left(C\omega - \dfrac{1}{L\omega}\right)^2}}$; 2. $f_r = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$; 3. $\Delta f = \dfrac{1}{2\pi RC}$; 5. $L = 44\,\text{mH}$; $C = 99\,\text{nF}$.

Exercice 6 : 2. $\alpha = \lambda/m$; $\beta = k/m$; $f(t) = \alpha\dot{e}(t) + \beta e(t) + \beta z_e$; 3. $\omega = \gamma V = \dfrac{2\pi V}{L}$; 4. $\omega_0 = \sqrt{k/m}$; $Q = \sqrt{km}/\lambda$; 6. $\Omega_r = 0{,}73$; 7. $V_r = 59\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$.