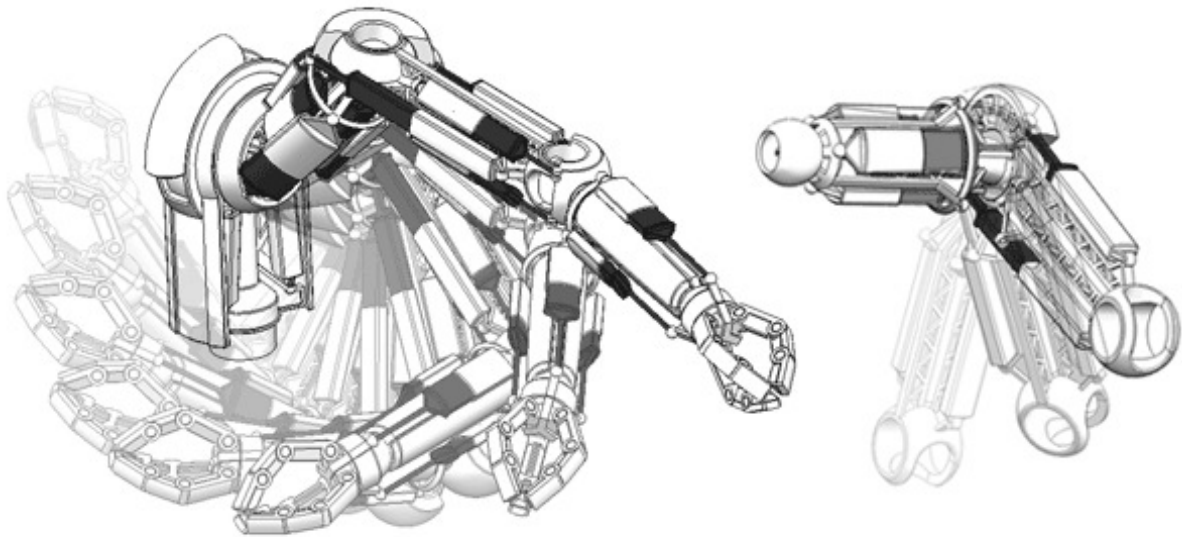


# Modélisation des performances cinématiques des systèmes



## Objectifs

La finalité de ce cours est de prédire les mouvements des solides des ensembles mécaniques connaissant ceux générés par les actionneurs ou de caractériser les liens entre les mouvements d'entrée et de sortie des transmetteurs : rapport de réduction des réducteurs (trains épicycloïdaux ou autres), nature et lien des mouvements pour les mécanismes de transformation de mouvement (bielle manivelle, croix de malte, pompe à pistons axiaux et radiaux, etc.).

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Trajectoire, vitesse et accélération</b>	<b>3</b>
2.1	Trajectoire d'un point d'un solide dans un référentiel . . . . .	3
2.2	Vitesse d'un point d'un solide dans un référentiel . . . . .	4
2.3	Accélération d'un point d'un solide dans un référentiel . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Champ des vecteurs vitesses, torseur cinématique</b>	<b>8</b>
3.1	Vecteur vitesse angulaire d'un solide en mouvement par rapport à un référentiel . . . . .	9
3.2	Champ de vecteurs vitesses d'un solide en mouvement par rapport à un référentiel . . . . .	10
3.3	Torseur cinématique . . . . .	12
3.4	Cas particulier du contact ponctuel . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Composition des mouvements</b>	<b>19</b>
4.1	Composition des vecteurs rotations . . . . .	19
4.2	Composition des vecteurs vitesses . . . . .	20
4.3	Composition des torseurs cinématiques . . . . .	22
4.4	Composition des accélérations . . . . .	22
4.5	Application de la composition des mouvements : fermeture cinématique	23
4.6	Mouvements plans sur plans . . . . .	26



# 1 Introduction

Le mot cinématique dérive du grec *kinêma*, *kinêmatos* qui signifie mouvement et définit la partie de la mécanique qui étudie les mouvements indépendamment des causes qui les provoquent. Les grandeurs étudiées en cinématique s'appellent trajectoire, vitesse et accélération et dépendent toutes du choix d'un référentiel. Dans ce cours, nous adopterons le point de vue de la mécanique classique ou newtonienne (non relativiste) pour laquelle il existe une notion de simultanéité temporelle absolue permettant de découpler les notions d'espace et de temps. On considèrera ainsi que le temps s'écoule de la même façon dans tous les référentiels et agit donc comme un paramètre immuable et indépendant de l'espace ou des objets physiques, tel qu'un changement de référentiel se limite à un changement de repère. On fera de plus souvent l'abus de langage : Repère  $\approx$  Référentiel.

Dans ce qui précède, nous avons montré que l'espace associé à un solide indéformable peut être rapporté à un repère (orthonormé direct). On peut donc en déduire que le caractère indéformable des solides leur confère une nature géométrique (conservation des angles et distances) similaire à celle de l'espace physique (ou d'observation). Par conséquent, dans ce cours nous allons étudier les mouvements des solides par rapport à d'autres, caractéristiques des mécanismes.

## 2 Trajectoire, vitesse et accélération

On considère dans ce qui suit un solide  $\mathcal{S}$  auquel est associé un repère  $\mathcal{R} = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  en mouvement dans un référentiel  $\mathcal{R}_0 = (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ .

### 2.1 Trajectoire d'un point d'un solide dans un référentiel

Chaque point  $M$  d'un solide  $\mathcal{S}$  en mouvement par rapport à un repère  $\mathcal{R}_0$ , occupe à chaque instant  $t$  une position dans le repère  $\mathcal{R}_0$  telle que les points  $M \in \mathcal{S}$  et  $M(t) \in \mathcal{R}_0$  coïncident. Au cours du temps, chaque point  $M \in \mathcal{S}$  décrit alors une courbe  $\mathcal{C}(M)$  dans le repère  $\mathcal{R}_0$  appelée **trajectoire** du point  $M \in \mathcal{S}$  dans le repère  $\mathcal{R}_0$ .

#### Définition 2.1 (Trajectoire d'un point d'un solide)

La trajectoire d'un point  $M \in \mathcal{S}$  par rapport à un référentiel  $\mathcal{R}_0$  est le lieu des positions successives occupées par le point  $M$  dans le repère  $\mathcal{R}_0$  au cours du temps. C'est donc une courbe dans  $\mathcal{R}_0$  définie par :

$$\mathcal{C}(M) = \{M(t) \mid t \in \mathbb{R}\} \in \mathcal{R}_0$$

Une trajectoire est orientée et suit le sens du mouvement.

#### Remarque 2.1 (Une trajectoire est toujours définie dans un repère)

La trajectoire d'un point d'un solide dépend du référentiel d'observation choisi : il est donc impossible de parler de trajectoire sans mentionner explicitement un repère !

## 2.2 Vitesse d'un point d'un solide dans un référentiel

Sauf dans le cas particulier d'un mouvement de translation, parler de la vitesse d'un solide n'a pas de sens. Par contre, on peut toujours définir la vitesse de chaque point d'un solide  $\mathcal{S}$  en mouvement dans un repère  $\mathcal{R}_0$ .

### Définition 2.2 (Vitesse d'un point d'un solide)

La vitesse instantanée d'un point  $M \in \mathcal{S}$  dans son mouvement par rapport au référentiel  $\mathcal{R}_0$ , d'origine  $O_0$ , est égale à la dérivée par rapport au temps et à l'instant  $t$  du vecteur position  $\overrightarrow{O_0M(t)}$  dans la base du repère  $\mathcal{R}_0$ ; formellement :

$$\overrightarrow{V_{M,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\overrightarrow{O_0M(t + \Delta t)} - \overrightarrow{O_0M(t)}}{\Delta t} \right) = \left. \frac{d\overrightarrow{O_0M}}{dt}(t) \right|_{\mathcal{R}_0}$$

### Remarque 2.2 (Vitesse absolue d'un point)

Cette définition de la vitesse d'un point  $M$  dans un référentiel  $\mathcal{R}_0$ , d'origine  $O_0$ , à l'instant  $t$  correspond à celle de sa vitesse absolue. Elle peut aussi être notée

$$\overrightarrow{V_{M/\mathcal{R}_0}} = \left. \frac{d\overrightarrow{O_0M}}{dt}(t) \right|_{\mathcal{R}_0}$$

sans mention du solide  $\mathcal{S}$ .

### Remarque 2.3 (Dérivation et base)

La dérivée par rapport au temps d'un vecteur n'a de sens que dans une base associée à un espace d'observation. Si on prend  $\mathcal{R}_0$  comme repère d'observation, de base  $\mathcal{B}_0$ , alors la dérivée peut se noter indifféremment dans la base  $\mathcal{B}_0$  ou dans le repère  $\mathcal{R}_0$ .

### Remarque 2.4 (Notation des vecteurs vitesses)

Comme le vecteur position, le vecteur vitesse dépend de l'instant choisi. Cependant, afin d'alléger les notations, cette dépendance ne sera jamais mentionnée explicitement.

## 2.3 Accélération d'un point d'un solide dans un référentiel

### Définition 2.3 (Accélération d'un point d'un solide)

L'accélération instantanée d'un point  $M \in \mathcal{S}$  dans son mouvement par rapport au référentiel  $\mathcal{R}_0$ , d'origine  $O_0$ , est égale à la dérivée seconde par rapport au temps et à l'instant  $t$  du vecteur position  $\overrightarrow{O_0M(t)}$  dans la base du repère  $\mathcal{R}_0$ ; formellement :

$$\overrightarrow{\Gamma_{M,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} = \left. \frac{d^2\overrightarrow{O_0M}}{dt^2}(t) \right|_{\mathcal{R}_0} = \left. \frac{d\overrightarrow{V_{M,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}}}{dt}(t) \right|_{\mathcal{R}_0}$$

## COMPLÉMENT MATHÉMATIQUE – Dérivation vectorielle

Soit  $\mathcal{V}$  un espace vectoriel orienté de dimension 3 (l'ensemble des vecteurs de l'espace). Soit  $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  une base orthonormée directe de  $\mathcal{V}$ . Soit  $\vec{u} : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{V}$  une application de classe  $C^1$ , appelée fonction vectorielle. Les composantes de  $\vec{u}$  dans  $\mathcal{B}$  sont trois applications  $(u_i)_{1 \leq i \leq 3}$  de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  respectivement définies comme

$$\forall i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket, u_i(t) = \vec{u}(t) \cdot \vec{e}_i.$$

Pour faire simple,  $\vec{u}(t)$  est un vecteur dont les composantes varient dans le temps.

### Définition 2.4 (Dérivée d'une fonction vectorielle)

La dérivée de  $\vec{u}$  à l'instant  $t$  dans la base  $\mathcal{B}$  est le vecteur :

$$\left. \frac{d\vec{u}}{dt}(t) \right|_{\mathcal{B}} = \frac{du_1}{dt}(t) \vec{e}_1 + \frac{du_2}{dt}(t) \vec{e}_2 + \frac{du_3}{dt}(t) \vec{e}_3$$

admettant comme composantes dans la base  $\mathcal{B}$  les dérivées par rapport au temps des composantes dans  $\mathcal{B}$ .

### Propriété 2.1

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux applications de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathcal{V}$ ,  $f$  et  $g$  deux applications de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et  $\mathcal{B}$  une base orthonormée directe de  $\mathcal{V}$ , alors il vient :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d(\vec{u} \cdot \vec{v})}{dt} \right|_{\mathcal{B}} &= \left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_{\mathcal{B}} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{\mathcal{B}} \\ \left. \frac{d(\vec{u} \wedge \vec{v})}{dt} \right|_{\mathcal{B}} &= \left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_{\mathcal{B}} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{\mathcal{B}} \\ \left. \frac{d(f\vec{u} + g\vec{v})}{dt} \right|_{\mathcal{B}} &= \frac{df}{dt} \vec{u} + f \left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_{\mathcal{B}} + \frac{dg}{dt} \vec{v} + g \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

avec une notation « fonctions » supprimant les dépendances explicites en  $t$ .

### Définition 2.5 (Vecteur mobile)

On appelle vecteur mobile sur  $\mathcal{V}$  une application non constante de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathcal{V}$ .

### Proposition 2.1 (Dérivée d'un vecteur mobile unitaire)

La dérivée par rapport au temps d'un vecteur mobile unitaire est orthogonale à ce vecteur.

*Démonstration.* Soit  $\vec{u}(t)$  un vecteur mobile unitaire quelconque tel que  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,

$\|\vec{u}(t)\| = 1$  ; d'où :

$$\frac{d(\vec{u} \cdot \vec{u})}{dt} \Big|_{\mathcal{B}} = 2 \frac{d\vec{u}}{dt} \Big|_{\mathcal{B}} \cdot \vec{u} = 0$$

Comme  $\vec{u}$  est non nul, pour que le produit scalaire soit nul :

- soit  $\frac{d\vec{u}}{dt} \Big|_{\mathcal{B}} = \vec{0}$ , c'est-à-dire que les composantes du vecteur  $\vec{u}$  sont constantes dans  $\mathcal{B}$ , ce qui n'est pas possible pour un vecteur mobile ;
- soit les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\frac{d\vec{u}}{dt} \Big|_{\mathcal{B}}$  sont orthogonaux.

□

### Définition 2.6 (Base mobile)

On appelle base mobile sur  $\mathcal{V}$  l'application  $\mathcal{B} : t \mapsto (\vec{e}_1(t), \vec{e}_2(t), \vec{e}_3(t))$  qui associe à chaque instant une base orthonormée directe constituée de trois vecteurs mobiles unitaires.

### Proposition 2.2 (Taux de rotation)

Il existe un unique vecteur permettant de définir le taux de rotation d'une base mobile orthonormée directe  $\mathcal{B}(t) = (\vec{e}_1(t), \vec{e}_2(t), \vec{e}_3(t))$  par rapport à une base orthonormée directe  $\mathcal{B}_0$ , noté  $\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{B}/\mathcal{B}_0}}$ , tel que :

$$\forall i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket, \quad \frac{d\vec{e}_i}{dt}(t) \Big|_{\mathcal{B}_0} = \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{B}/\mathcal{B}_0}}(t) \wedge \vec{e}_i(t)$$

*Démonstration.* Pour démontrer l'existence et l'unicité du taux de rotation, commençons par exploiter la propriété de normalité des vecteurs de la base mobile  $\mathcal{B}$  tel que l'on puisse écrire chaque vecteur dérivé comme une combinaison linéaire :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{e}_1}{dt}(t) \Big|_{\mathcal{B}_0} &= a_{12}\vec{e}_2 + a_{13}\vec{e}_3 \\ \frac{d\vec{e}_2}{dt}(t) \Big|_{\mathcal{B}_0} &= a_{21}\vec{e}_1 + a_{23}\vec{e}_3 \\ \frac{d\vec{e}_3}{dt}(t) \Big|_{\mathcal{B}_0} &= a_{31}\vec{e}_1 + a_{32}\vec{e}_2 \end{aligned}$$

impliquant au total six réels  $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3, i \neq j}$ . Comme les trois vecteurs de base sont

deux à deux orthogonaux, il vient :

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0 &\implies \vec{e}_1 \cdot \frac{d\vec{e}_2}{dt} \Big|_{\mathcal{B}_0} + \vec{e}_2 \cdot \frac{d\vec{e}_1}{dt} \Big|_{\mathcal{B}_0} = 0 \iff a_{21} + a_{12} = 0 \\ \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = 0 &\implies \vec{e}_1 \cdot \frac{d\vec{e}_3}{dt} \Big|_{\mathcal{B}_0} + \vec{e}_3 \cdot \frac{d\vec{e}_1}{dt} \Big|_{\mathcal{B}_0} = 0 \iff a_{31} + a_{13} = 0 \\ \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = 0 &\implies \vec{e}_2 \cdot \frac{d\vec{e}_3}{dt} \Big|_{\mathcal{B}_0} + \vec{e}_3 \cdot \frac{d\vec{e}_2}{dt} \Big|_{\mathcal{B}_0} = 0 \iff a_{32} + a_{23} = 0\end{aligned}$$

Il ne reste donc que trois paramètres indépendants. En ne conservant que  $a_{12}$ ,  $a_{23}$  et  $a_{31}$ , il vient alors :

$$\frac{d\vec{e}_1}{dt} \Big|_{\mathcal{B}_0} = a_{12}\vec{e}_2 - a_{31}\vec{e}_3, \quad \frac{d\vec{e}_2}{dt} \Big|_{\mathcal{B}_0} = -a_{12}\vec{e}_1 + a_{23}\vec{e}_3 \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{e}_3}{dt} \Big|_{\mathcal{B}_0} = a_{31}\vec{e}_1 + a_{23}\vec{e}_2$$

qui peut s'écrire

$$\forall i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket, \quad \frac{d\vec{e}_i}{dt} \Big|_{\mathcal{B}_0} = \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{B}/\mathcal{B}_0}} \wedge \vec{e}_i \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{B}/\mathcal{B}_0}} = a_{23}\vec{e}_1 + a_{31}\vec{e}_2 + a_{12}\vec{e}_3.$$

□

### **Théorème 2.1 (Dérivation vectorielle)**

*Les dérivées temporelles d'un vecteur  $\vec{v}$  mobile dans deux bases différentes  $\mathcal{B}_0$  et  $\mathcal{B}$  liées entre elles par le taux de rotation  $\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{B}/\mathcal{B}_0}}$  sont liées par la relation :*

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \Big|_{\mathcal{B}_0} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Big|_{\mathcal{B}} + \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{B}/\mathcal{B}_0}} \wedge \vec{v}$$

*souvent appelée « formule de Bour ».*

*Démonstration.* Soit  $\vec{v}(t)$  un vecteur mobile quelconque dont les composantes dans la base mobile  $\mathcal{B}(t) = (\vec{e}_1(t), \vec{e}_2(t), \vec{e}_3(t))$  sont trois applications de classes  $C^1$  telles qu'il s'écrive :

$$\vec{v}(t) = \sum_{i=1}^3 v_i(t) \vec{e}_i(t)$$

Par application des règles de dérivation, il vient :

$$\frac{d\vec{v}}{dt}(t) \Big|_{\mathcal{B}_0} = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{dv_i}{dt}(t) \vec{e}_i(t) + v_i(t) \frac{d\vec{e}_i}{dt}(t) \Big|_{\mathcal{B}_0} \right)$$

Comme les vecteurs dérivés des vecteurs de la base mobile sont définis comme

$$\forall i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket, \quad \left. \frac{d\vec{e}_i}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0} = \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{B}/\mathcal{B}_0}} \wedge \vec{e}_i$$

par simple substitution il vient :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\vec{v}}{dt}(t) \right|_{\mathcal{B}_0} &= \sum_{i=1}^3 \left( \frac{dv_i}{dt}(t) \vec{e}_i(t) + v_i(t) \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{B}/\mathcal{B}_0}} \wedge \vec{e}_i \right) \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^3 \left( \frac{dv_i}{dt}(t) \vec{e}_i(t) \right)}_{\left. \frac{d\vec{v}}{dt}(t) \right|_{\mathcal{B}}} + \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{B}/\mathcal{B}_0}} \wedge \underbrace{\left( \sum_{i=1}^3 v_i(t) \vec{e}_i \right)}_{\vec{v}(t)} \end{aligned}$$

□

### 3 Champ des vecteurs vitesses, torseur cinématique

On considère dans ce qui suit un solide  $\mathcal{S}$  auquel est associé un repère  $\mathcal{R} = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  en mouvement dans un référentiel  $\mathcal{R}_0 = (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ .

#### Définition 3.1 (Champ vectoriel)

On appelle un champ vectoriel sur  $\mathcal{E}$  une application

$$\begin{aligned} \chi : \quad \mathcal{E} &\rightarrow \mathcal{E} \times \mathcal{V} \\ M &\mapsto (M, v(M)) \end{aligned}$$

qui à tout point  $M \in \mathcal{E}$  de l'espace associe un vecteur  $\vec{v}(M) \in \mathcal{V}$ .

En pratique, pour simplifier l'écriture, on confond souvent le champ  $\chi$  avec sa valeur en un point  $v(M)$ . D'un point de vue géométrique, un champ de vecteurs consiste simplement à mettre un vecteur en chaque point de l'espace.

Le champ des vitesses des points d'un solide  $\mathcal{S}$  dans un référentiel  $\mathcal{R}_0$  est un champ vectoriel. Il correspond à l'ensemble des vecteurs

$$\left\{ \overrightarrow{V_{M,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} \mid M \in \mathcal{S} \right\}$$

#### Définition 3.2 (Champ de vecteurs équiprojectif)

Un champ de vecteurs  $\chi$ , de valeur  $v$ , est équiprojectif sur  $\mathcal{E}$  si :

$$\forall M, N \in \mathcal{E}, \quad (\vec{v}(M) - \vec{v}(N)) \cdot \overrightarrow{MN} = 0$$



### 3.1 Vecteur vitesse angulaire d'un solide en mouvement par rapport à un référentiel

Pour connaître les variations temporelles de l'orientation d'un solide  $\mathcal{S}$  – auquel on a associé un repère  $\mathcal{R}$ , de base  $\mathcal{B}$  – dans un référentiel  $\mathcal{R}_0$ , de base  $\mathcal{B}_0$ , il est nécessaire de définir le taux de rotation ou vecteur vitesse angulaire d'un solide.

#### Définition 3.3 (Vecteur vitesse angulaire)

Le vecteur vitesse angulaire ou de rotation (instantané) du solide  $\mathcal{S}$  dans son mouvement par rapport au repère  $\mathcal{R}_0$  correspond au vecteur

$$\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} = \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{B}/\mathcal{B}_0}}$$

où  $\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{B}/\mathcal{B}_0}}$  est le taux de rotation qui caractérise les changements d'orientation de la base  $\mathcal{B}$  par rapport à la base  $\mathcal{B}_0$  :

- sa direction correspond à l'axe autour duquel la base  $\mathcal{B}$  tourne par rapport à la base  $\mathcal{B}_0$  ;
- son sens correspond à celui de la rotation (selon la règle de la main droite) ;
- sa norme correspond à la vitesse angulaire en  $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$  à laquelle se fait cette rotation.

#### Propriété 3.1 (Antisymétrie du taux de rotation)

Le vecteur taux de rotation est anti-symétrique :

$$\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{B}/\mathcal{B}_0}} = -\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{B}_0/\mathcal{B}}}$$

*Démonstration.* D'après la formule de dérivation vectorielle, on a pour tout vecteur  $\vec{v}$  non nul :

$$\left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0} = \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{\mathcal{B}} + \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{B}/\mathcal{B}_0}} \wedge \vec{v} \quad \text{et} \quad \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{\mathcal{B}} = \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0} + \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{B}_0/\mathcal{B}}} \wedge \vec{v}$$

d'où :

$$\forall \vec{v} \neq \vec{0}, \quad (\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{B}/\mathcal{B}_0}} + \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{B}_0/\mathcal{B}}}) \wedge \vec{v} = \vec{0} \iff \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{B}/\mathcal{B}_0}} = -\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{B}_0/\mathcal{B}}}$$

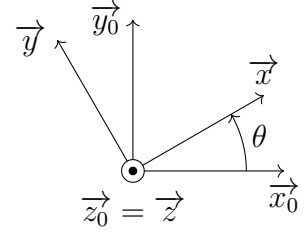
□

#### Proposition 3.1 (Taux de rotation plane)

Lorsque deux bases orthonormées directes ont un axe confondu, le vecteur taux rotation est porté par l'axe commun et sa composante sur cet axe est la dérivée de l'angle qui repère la rotation.

De façon pratique, on déterminera souvent le taux de rotation reliant deux bases orthonormées directes de l'espace  $\mathcal{B}_0 = (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  et  $\mathcal{B} = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , à partir d'une figure géométrale. Ainsi, si le vecteur commun (la normale au plan de la figure) est  $\vec{z}_0 = \vec{z}$  et que l'angle orienté défini est  $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}) = (\vec{y}_0, \vec{y})$  alors le taux de rotation est :

$$\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{B}/\mathcal{B}_0}} = \dot{\theta} \vec{z}$$



*Démonstration.* À partir de la figure géométrale, on a :

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \cos(\theta) \vec{x}_0 + \sin(\theta) \vec{y}_0 & \Rightarrow \left. \frac{d\vec{x}}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0} &= \dot{\theta} (-\sin(\theta) \vec{x}_0 + \cos(\theta) \vec{y}_0) = \dot{\theta} \vec{y} \\ \vec{y} &= \cos(\theta) \vec{y}_0 - \sin(\theta) \vec{x}_0 & \Rightarrow \left. \frac{d\vec{y}}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0} &= \dot{\theta} (-\sin(\theta) \vec{y}_0 - \sin(\theta) \vec{x}_0) = -\dot{\theta} \vec{x} \\ \vec{z} &= \vec{z}_0 & \Rightarrow \left. \frac{d\vec{z}}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0} &= \vec{0} \end{aligned}$$

De la troisième expression, on trouve que le taux de rotation est colinéaire à  $\vec{z}$  :

$$\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{B}/\mathcal{B}_0}} \wedge \vec{z} = \vec{0} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{B}/\mathcal{B}_0}} = \lambda \vec{z}$$

En exploitant ce résultat dans les deux autres directions puis, par identification, il vient alors :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{B}/\mathcal{B}_0}} \wedge \vec{x} = \lambda \vec{y} = \dot{\theta} \vec{y} \\ \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{B}/\mathcal{B}_0}} \wedge \vec{y} = -\lambda \vec{x} = -\dot{\theta} \vec{x} \end{cases} \iff \lambda = \dot{\theta}$$

d'où le résultat. □

### 3.2 Champ de vecteurs vitesses d'un solide en mouvement par rapport à un référentiel

Puisqu'on associe à chaque solide indéformable un repère, les vecteurs  $\overrightarrow{V_{M,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}}$  et  $\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}}$  caractérisent le mouvement du solide  $\mathcal{S}$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}_0$ . Le solide étant indéformable, il est possible de définir la vitesse en tout point du solide  $N \in \mathcal{S}$ .

#### Théorème 3.1 (Champ de vitesses)

Les vecteurs vitesses de deux points  $M$  et  $N$  d'un solide  $\mathcal{S}$  en mouvement par rapport à un référentiel  $\mathcal{R}_0$  sont liés par la formule de changement de point :

$$\overrightarrow{V_{N,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} = \overrightarrow{V_{M,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} + \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} \wedge \overrightarrow{MN}$$

*Démonstration.* À partir de la définition, on obtient :

$$\overrightarrow{V_{N,S/\mathcal{R}_0}} = \left. \frac{d\overrightarrow{O_0N}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} = \underbrace{\left. \frac{d\overrightarrow{O_0M}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0}}_{\overrightarrow{V_{M,S/\mathcal{R}_0}}} + \left. \frac{d\overrightarrow{MN}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0}$$

qui avec la relation de dérivation vectorielle

$$\left. \frac{d\overrightarrow{MN}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} = \underbrace{\left. \frac{d\overrightarrow{MN}}{dt} \right|_{\mathcal{R}}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}_0}} \wedge \overrightarrow{MN(t)}$$

où nous avons exploité l'hypothèse de solide indéformable – qui revient à considérer que l'expression du vecteur  $\overrightarrow{MN}$  est constante dans le repère  $\mathcal{R}$  – conduit à la relation de changement de point :

$$\overrightarrow{V_{N,S/\mathcal{R}_0}} = \overrightarrow{V_{M,S/\mathcal{R}_0}} + \overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}_0}} \wedge \overrightarrow{MN}$$

souvent appelée « formule de Varignon » en hommage au mathématicien français Pierre VARIGNON.  $\square$

Partant de ce point, la connaissance de la vitesse d'un point du solide et du vecteur de rotation du solide  $\mathcal{S}$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}_0$  permet de définir l'ensemble des vecteurs vitesses appelé **champ des vecteurs vitesses**.

### **Théorème 3.2 (Équiprojectivité du champ de vitesses)**

*Le champ des vecteurs vitesses est équiprojectif, c'est-à-dire qu'il vérifie la relation :*

$$\overrightarrow{V_{M,S/\mathcal{R}_0}} \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{V_{N,S/\mathcal{R}_0}} \cdot \overrightarrow{MN}$$

*Démonstration.* Le solide  $\mathcal{S}$  étant indéformable, la longueur ( $MN$ ) est invariable, ce qui s'écrit

$$\frac{d(\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MN})}{dt} = 2 \overrightarrow{MN} \cdot \left. \frac{d\overrightarrow{MN}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} = 0$$

En exploitant la relation de Chasles  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MO_0} + \overrightarrow{O_0N}$  et après division par 2, il vient :

$$\overrightarrow{MN} \cdot \left( \left. \frac{d\overrightarrow{O_0N}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} - \left. \frac{d\overrightarrow{O_0M}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} \right) = \overrightarrow{MN} \cdot (\overrightarrow{V_{N,S/\mathcal{R}_0}} - \overrightarrow{V_{M,S/\mathcal{R}_0}}) = 0$$

d'où on obtient la définition de l'équiprojectivité du champ de vitesses par simple réarrangement des termes de chaque côté du signe égal.  $\square$

### 3.3 Torseur cinématique

Les champs vectoriels équiprojectifs (ou antisymétriques) sont appelés torseurs. Dans le cas de la cinématique, le mouvement d'un solide  $\mathcal{S}$  dans un référentiel  $\mathcal{R}_0$  sera complètement défini par le torseur cinématique de  $\mathcal{S}$  par rapport à  $\mathcal{R}_0$ .

#### Définition 3.4 (Torseur cinématique)

Le torseur cinématique du solide  $\mathcal{S}$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}_0$  traduit le champ de vitesses (équiprojectif) du solide  $\mathcal{S}$  dans le référentiel  $\mathcal{R}_0$  et est noté :

$$\{\mathcal{V}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} \\ \overrightarrow{V_{M,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} \end{array} \right\}_M = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} \\ \overrightarrow{V_{N,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} \end{array} \right\}_N$$

Ce torseur est défini en tout point de l'espace et son expression en un point  $M$  fait appel aux éléments de réduction du torseur que sont :

- sa résultante  $\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}}$ , qui est invariante (la même en tout point) ;
- son moment  $\overrightarrow{V_{M,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}}$ , qui dépend du point de réduction, ici  $M$ .

#### COMPLÉMENT MATHÉMATIQUE – Torseurs

On note  $\mathcal{E}$  l'ensemble des points de l'espace géométrique à trois dimensions et  $\mathcal{V}$  l'ensemble des vecteurs de l'espace.

#### Définition 3.5 (Torseur)

Un torseur est un champ vectoriel antisymétrique ou équiprojectif défini sur  $\mathcal{E}$  et à valeurs dans  $\mathcal{V}$ . Il est défini par ses éléments de réduction en un point :

- sa résultante  $\vec{R}$ , qui est invariante (la même en tout point) ;
- son moment  $\vec{M}(P)$  qui dépend du point de réduction.

On le note :

$$\{\mathcal{T}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M}(P) \end{array} \right\}_P$$

#### Propriété 3.2 (Torseur)

Un torseur est caractérisé par :

- la relation de changement de point :

$$\vec{M}(Q) = \vec{M}(P) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{PQ}$$

- la propriété d'équiprojectivité :

$$\vec{M}(P) \cdot \overrightarrow{PQ} = \vec{M}(Q) \cdot \overrightarrow{PQ}$$

## Opérations sur les torseurs

### Définition 3.6 (Égalité de deux torseurs)

Deux torseurs sont égaux si et seulement si leurs éléments de réduction en un (même) point sont égaux.

### Propriété 3.3 (Addition)

L'addition de deux torseurs est commutative et associative. Les éléments de réduction du torseur résultant en un point sont constitués de la somme des résultantes et de la somme des moments exprimés au même point.

L'élément neutre de l'addition est le torseur nul.

### Propriété 3.4 (Multiplication par un réel)

La multiplication d'un torseur par un réel est distributive. Les éléments de réduction du torseur résultant en un point sont constitués de la résultante et du moment en un point tous deux multipliés par le réel.

### Définition 3.7 (Automoment ou invariant scalaire d'un torseur)

L'automoment d'un torseur correspond au produit scalaire de la résultante et du moment du torseur en un point :

$$\forall P \in \mathcal{V}, \mathcal{A}_{\mathcal{T}} = \vec{R} \cdot \vec{M}(P)$$

C'est un invariant, c'est-à-dire qu'il ne dépend pas du point où il est calculé.

### Définition 3.8 (Comoment de deux torseurs)

Le comoment de deux torseurs  $\{\mathcal{T}_1\}$  et  $\{\mathcal{T}_2\}$  est un scalaire défini par :

$$\{\mathcal{T}_1\} \otimes \{\mathcal{T}_2\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_1 \\ \vec{M}_1(P) \end{array} \right\}_P \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_2 \\ \vec{M}_2(P) \end{array} \right\}_P = \vec{R}_1 \cdot \vec{M}_2(P) + \vec{R}_2 \cdot \vec{M}_1(P)$$

## Torseurs particuliers

### Définition 3.9 (Torseur nul)

Un torseur nul est un torseur dont les éléments de réduction sont nuls en tout point.

### Définition 3.10 (Glisseur)

Un torseur de résultante non nulle est un glisseur si son invariant scalaire est nul. Un glisseur est caractérisé par sa résultante et son axe central.

### Définition 3.11 (Torseur couple)

Un torseur couple est un torseur de résultante nulle, mais de moment non nul. Il est constant, son invariant scalaire est nul et il n'a pas d'axe central. Il caractérise un champ uniforme.

**Réduction en un point** Pour définir le torseur cinématique du solide  $\mathcal{S}$  par rapport au repère  $\mathcal{R}_0$  en un point  $M$  de l'espace, on écrira sous forme vectorielle les éléments de réduction au point  $M$  ; par exemple :

$$\left\{ \mathcal{V}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0} \right\} = \underset{M}{\left\{ \begin{array}{c} \omega \vec{z} \\ r\omega \vec{x} + \lambda \vec{z} \end{array} \right\}}$$

où l'on prendra soin de toujours définir le point de réduction en le plaçant avant l'accolade dans laquelle on écrira ensuite la résultante et le moment au point choisi et sous forme vectorielle.

### 3.3.1 Axe central

À chaque instant, tout torseur cinématique dont la résultante est non nulle possède un axe central (figure 1).

#### Définition 3.12 (Axe central)

L'axe central d'un torseur cinématique correspond à l'ensemble des points  $A$  où la vitesse (moment du torseur) est colinéaire au vecteur de rotation (résultante du torseur) :

$$\overrightarrow{V_{A,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} \wedge \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} = \vec{0}$$

L'axe central est appelé axe instantané de rotation (ou de glissement). Il n'existe que si la résultante est non nulle.

#### Théorème 3.3

*L'ensemble des points  $A$  de l'axe central d'un torseur cinématique du solide  $\mathcal{S}$  par rapport au repère  $\mathcal{R}_0$  est défini à partir d'un point  $M$  quelconque par la relation :*

$$\overrightarrow{MA} = \lambda \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} - \frac{\overrightarrow{V_{M,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} \wedge \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}}}{\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}}}$$

avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{S}$  un solide en mouvement par rapport à  $\mathcal{R}_0$  dont on connaît le torseur cinématique au point  $M$  :

$$\left\{ \mathcal{V}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0} \right\} = \underset{M}{\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} \\ \overrightarrow{V_{M,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} \end{array} \right\}}$$

Soit  $A$  un point de l'axe central de ce torseur tel que, par définition :

$$\overrightarrow{V_{A,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} \wedge \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} = \vec{0}$$

En utilisant la relation de changement de point

$$\overrightarrow{V_{A,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} = \overrightarrow{V_{M,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} + \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} \wedge \overrightarrow{MA}$$

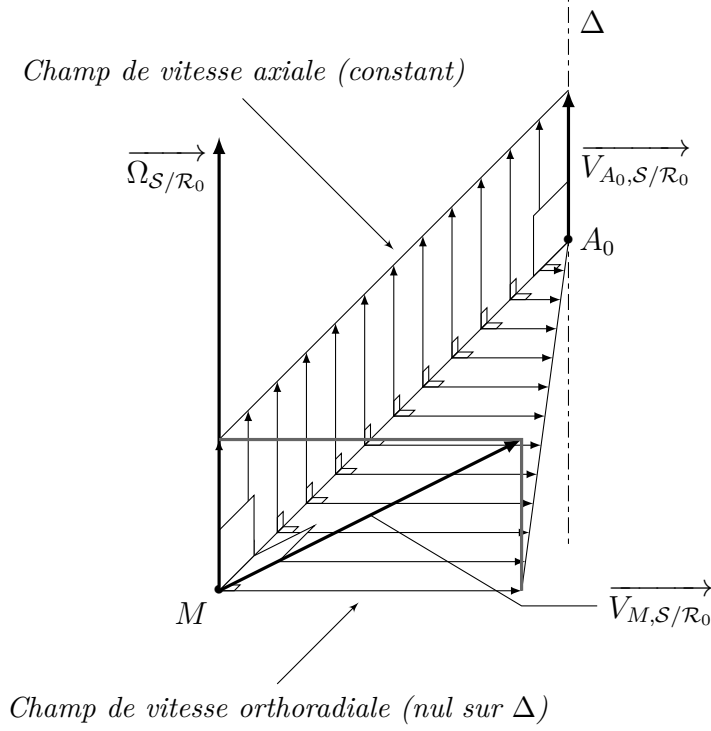


FIGURE 1 – Axe central d'un torseur cinématique.

il vient :

$$\overrightarrow{V_{M,S/R_0}} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R_0}} + \left( \overrightarrow{\Omega_{S/R_0}} \wedge \overrightarrow{MA} \right) \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R_0}} = \vec{0}$$

Comme par définition l'axe central est une droite de même direction que  $\overrightarrow{\Omega_{S/R_0}}$ , il convient de définir un point  $A_0$  tel que  $\overrightarrow{MA_0}$  soit perpendiculaire à l'axe central et  $\overrightarrow{A_0A}$  suivant cet axe ; soit :

$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MA_0} + \overrightarrow{A_0A} \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{MA_0} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R_0}} = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{A_0A} = \lambda \overrightarrow{\Omega_{S/R_0}}$$

telle que l'expression devienne

$$\overrightarrow{V_{M,S/R_0}} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R_0}} + \left( \overrightarrow{\Omega_{S/R_0}} \wedge \overrightarrow{MA_0} \right) \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R_0}} = \vec{0}$$

À partir de ce point, en utilisant la relation du double produit vectoriel

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a}$$

il vient :

$$\overrightarrow{V_{M,S/R_0}} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R_0}} + \left( \overrightarrow{\Omega_{S/R_0}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R_0}} \right) \overrightarrow{MA_0} - \underbrace{\left( \overrightarrow{\Omega_{S/R_0}} \cdot \overrightarrow{MA_0} \right)}_0 \overrightarrow{\Omega_{S/R_0}} = \vec{0}$$

conduisant à l'expression :

$$\overrightarrow{MA_0} = - \frac{\overrightarrow{V_{M,S/R_0}} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R_0}}}{\overrightarrow{\Omega_{S/R_0}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R_0}}}$$

mentionnant que la direction du vecteur  $\overrightarrow{MA_0}$  est la normale au plan défini par les vecteurs  $\overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}_0}}$  et  $\overrightarrow{V_{M,S/\mathcal{R}_0}}$ . En ajoutant le vecteur  $\overrightarrow{A_0A} = \lambda \overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}_0}}$  à cette expression, on trouve l'expression recherchée.  $\square$

### Définition 3.13 (Moment central)

Le moment central est le moment du torseur en un point quelconque de son axe central. La norme du moment central d'un torseur est minimale.

### Propriété 3.5 (Axe central d'un glisseur)

Si le moment d'un torseur est nul en un point, ce point appartient à l'axe central et le torseur est un glisseur. L'axe central se définit alors à l'aide de ce point et de la résultante.

### Définition 3.14 (Forme canonique d'un torseur)

La forme canonique d'un torseur consiste en l'expression des éléments de réduction en un point de son axe central s'il existe.

## 3.3.2 Torseur cinématique des liaisons usuelles

Pour l'étude de nos systèmes industriels, il est absolument nécessaire de connaître la forme canonique du torseur cinématique associé aux mouvements permis par chaque liaison normalisée. Ils sont répertoriés dans la table 1.



Liaison	Schématisation spatiale	Schématisation plane	Torseur cinématique
Glissière			$\forall M \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ V\vec{u} \end{array} \right\}$
Pivot			$\forall B \in (A, \vec{u}), \left\{ \begin{array}{c} \omega\vec{u} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B$
Hélicoïdale			$\forall B \in (A, \vec{u}) \text{ pas } p \text{ à droite } \left\{ \begin{array}{c} \omega\vec{u} \\ \frac{p}{2\pi}\omega\vec{u} \end{array} \right\}_B$
Pivot glissant			$\forall B \in (A, \vec{u}), \left\{ \begin{array}{c} \omega\vec{u} \\ V\vec{u} \end{array} \right\}_B$
Appui-plan			$\left\{ \begin{array}{c} \omega\vec{n} \\ \vec{V}_A \end{array} \right\}_A \text{ avec } \vec{V}_A \cdot \vec{n} = 0$
Sphérique			$\left\{ \begin{array}{c} \vec{\omega} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_C$
Sphérique à doigt			$\left\{ \begin{array}{c} \omega_1\vec{u}_1 + \omega_2\vec{u}_2 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_C$
Cylindre-plan			$\left\{ \begin{array}{c} \omega_1\vec{n}_1 + \omega_2\vec{u}_2 \\ \vec{V}_A \end{array} \right\}_A \text{ avec } \vec{V}_A \cdot \vec{n}_1 = 0$
Sphère-cylindre			$\left\{ \begin{array}{c} \vec{\omega} \\ V\vec{u} \end{array} \right\}_C$
Sphère-plan			$\left\{ \begin{array}{c} \vec{\omega} \\ \vec{V}_C \end{array} \right\}_C \text{ avec } \vec{V}_C \cdot \vec{n} = 0$

TABLE 1 – Liaisons élémentaires et torseurs cinématiques associés.

### 3.4 Cas particulier du contact ponctuel

On revient dans cette partie sur la forme du torseur cinématique d'une liaison sphère plan. Cette liaison intervenant très souvent dans les applications de sciences de l'ingénieur, il est usuel de définir certaines notations supplémentaires. Pour les mettre en place, on considère deux solides  $S_1$  et  $S_2$  en contact au point  $P$ . Le plan tangent commun (plan osculateur au contact) est noté  $\Pi$ .

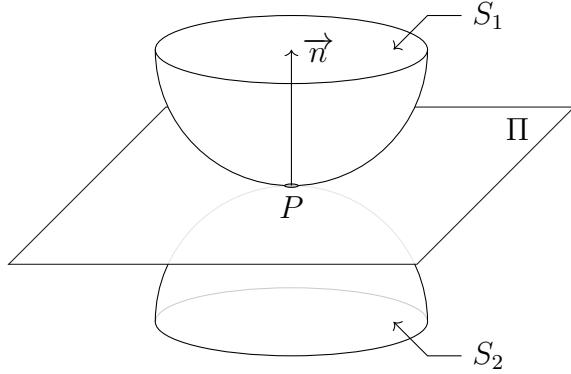


FIGURE 2 – Géométrie du contact ponctuel.

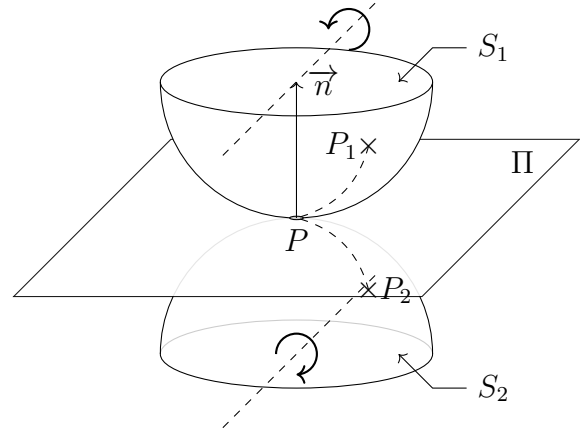


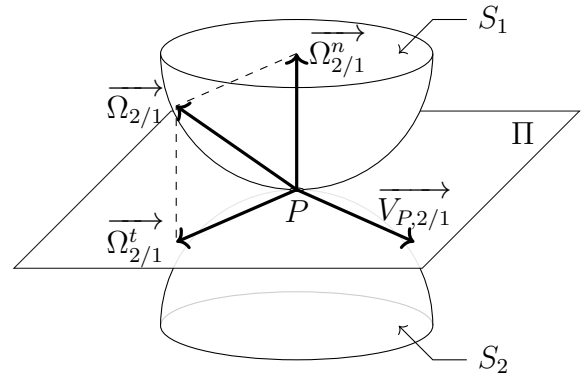
FIGURE 3 – Illustration du point coïncidant.

Pour différencier le point de contact des points physiques  $P_1$  et  $P_2$  appartenant respectivement aux solides  $S_1$  et  $S_2$ , il faut imaginer les solides à l'instant  $t + \Delta t$ . Ils ont tourné autour de leurs centres respectifs. Quand à l'instant  $t$  tous les points sont confondus, ils apparaissent distincts à l'instant  $t + \Delta t$  (figure 3). Le point  $P$  toujours en contact est appelé **point coïncidant au contact**.

Le torseur cinématique du mouvement de  $S_1/S_2$  en  $P$  s'écrit :

$$\left\{ \mathcal{V}_{S_2/S_1} \right\}_P = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \\ \overrightarrow{V_{P,2/1}} \end{array} \right\}$$

avec  $\overrightarrow{\Omega_{2/1}} = \overrightarrow{\Omega_{2/1}^n} + \overrightarrow{\Omega_{2/1}^t}$   
 $\overrightarrow{V_{P,2/1}} \cdot \overrightarrow{n} = 0$



- Le vecteur  $\overrightarrow{V_{P,2/1}}$  est appelé vecteur vitesse de glissement de  $S_2/S_1$ . Il est dans le plan tangent commun  $\Pi$  et est dirigé suivant la direction privilégiée du glissement. Il n'a pas de composante selon le vecteur normal au contact  $\overrightarrow{n}$  car les solides ne peuvent pas s'interpénétrer.
- Le vecteur  $\overrightarrow{\Omega_{2/1}^n}$  est appelé vecteur rotation de pivotement ; il est porté par la normale au contact.
- Le vecteur  $\overrightarrow{\Omega_{2/1}^t}$  est appelé vecteur rotation de roulement ; il est porté par une direction du plan tangent commun.

### Remarque 3.1 (Cas du roulement sans glissement)

Il est souvent utile dans les applications d'utiliser un cas particulier du contact ponctuel pour lequel les solides en contact roulent l'un par rapport à l'autre sans glisser. Un exemple typique de ce cas est donné par une roue qui roule sur la route sans glisser. Les composantes du torseur cinématique de la liaison se simplifient alors :

$$\overrightarrow{V_{P,2/1}} = \overrightarrow{0} \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{\Omega_{2/1}^n} = \overrightarrow{0} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\Omega_{2/1}^t} \neq \overrightarrow{0}$$

Un tel contact est appelé **roulement sans glissement** (ni pivotement).

## 4 Composition des mouvements

Les applications de sciences de l'ingénieur font toujours apparaître plusieurs classes d'équivalence dans la partie mécanique d'un système. Dans ce cadre, il est souvent très utile de regarder le mouvement d'un solide dans différents référentiels. On cherche donc à définir des lois de composition de mouvements. Ces lois nous serviront notamment à déterminer des lois entrées-sorties, en écrivant des fermetures cinématiques.

### 4.1 Composition des vecteurs rotations

Quand plusieurs solides sont en mouvement les uns par rapport aux autres, les vecteurs rotations sont liés par le théorème suivant :

#### Théorème 4.1

Soient  $(\overrightarrow{\Omega_{i+1/i}})_{0 \leq i \leq n-1}$ ,  $n$  taux de rotation entre  $(n+1)$  bases orthonormées directes  $(\mathcal{B}_i)_{0 \leq i \leq n}$ . La composition des taux de rotation s'écrit :

$$\overrightarrow{\Omega_{n/0}} = \sum_{i=0}^{n-1} \overrightarrow{\Omega_{i+1/i}}$$

*Démonstration.* Soit  $\overrightarrow{u}$  un vecteur mobile quelconque, non nul. Par définition, on a :

$$\left. \frac{d\overrightarrow{u}}{dt} \right|_0 = \left. \frac{d\overrightarrow{u}}{dt} \right|_n + \overrightarrow{\Omega_{n/0}} \wedge \overrightarrow{u}$$

et

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad \left. \frac{d\overrightarrow{u}}{dt} \right|_k = \left. \frac{d\overrightarrow{u}}{dt} \right|_{k+1} + \overrightarrow{\Omega_{k+1/k}} \wedge \overrightarrow{u}$$

d'où, par somme et linéarité du produit vectoriel :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \left. \frac{d\overrightarrow{u}}{dt} \right|_0 = \left. \frac{d\overrightarrow{u}}{dt} \right|_k + \left( \sum_{i=0}^{k-1} \overrightarrow{\Omega_{i+1/i}} \right) \wedge \overrightarrow{u}$$

Par existence et unicité, il vient l'identification du taux de rotation :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \overrightarrow{\Omega_{k/0}} = \sum_{i=0}^{k-1} \overrightarrow{\Omega_{i+1/i}}$$

En particulier pour  $k = n$ , il vient bien :

$$\overrightarrow{\Omega_{n/0}} = \sum_{i=0}^{n-1} \overrightarrow{\Omega_{i+1/i}}$$

Ce qui prouve la relation de composition des taux de rotation. □

## 4.2 Composition des vecteurs vitesses

Pour étudier le mouvement du point  $A \in \mathcal{R}$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}_1$ , il est toujours possible d'utiliser une composition de la forme :

$$\overrightarrow{V_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_1}} = \overrightarrow{V_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_2}} + \overrightarrow{V_{A \in \mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}}$$

faisant intervenir le référentiel  $\mathcal{R}_2$  associé à un solide  $\mathcal{S}_2$ . On appelle alors :

- vitesse absolue du point  $A$  dans le référentiel  $\mathcal{R}_1$  le vecteur  $\overrightarrow{V_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_1}}$  ;
- vitesse relative du point  $A$  dans le référentiel  $\mathcal{R}_2$  le vecteur  $\overrightarrow{V_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_2}}$  ;
- vitesse d'entraînement du point  $A$  du solide  $\mathcal{S}_2$  dans son mouvement par rapport au référentiel  $\mathcal{R}_1$  le vecteur  $\overrightarrow{V_{A \in \mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}} \stackrel{\text{déf.}}{=} \overrightarrow{V_{A,\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}}$  où le «  $A \in \mathcal{R}_2$  » signifie que l'on a « attaché le point  $A$  au solide  $\mathcal{S}_2$  ».

### Remarque 4.1 (Calcul des vitesses d'entraînement)

Contrairement aux vitesses absolues ou relatives d'un point dans un référentiel, la vitesse d'entraînement d'un point d'un solide dans un référentiel ne peut pas être calculée par dérivation sans faire d'hypothèse et doit donc être calculée à partir du champ de vitesses (torseur).

### Théorème 4.2

Soient  $(\mathcal{R}_i = (O_i, \mathcal{B}_i))_{0 \leq i \leq n}$   $(n+1)$  repères, de bases orthonormées directes. On note  $(\overrightarrow{\Omega_{i+1/i}})_{0 \leq i \leq n-1}$  les taux de rotation entre les différentes bases. La composition des vitesses au point  $A$  s'écrit :

$$\overrightarrow{V_{A,n/0}} = \overrightarrow{V_{A,n/n-1}} + \sum_{i=0}^{n-2} \overrightarrow{V_{A \in i+1/i}}$$

où les  $\overrightarrow{V_{A \in i+1/i}}$  sont des vitesses d'entraînement (à calculer par changement de point).

*Démonstration.* Par définition, on a :

$$\overrightarrow{V_{A,n/0}} = \left. \frac{d\overrightarrow{O_0A}}{dt} \right|_0$$

Par relation de Chasles, il vient :

$$\overrightarrow{V_{A,n/0}} = \sum_{i=0}^{n-2} \left. \frac{d\overrightarrow{O_iO_{i+1}}}{dt} \right|_0 + \left. \frac{d\overrightarrow{O_{n-1}A}}{dt} \right|_0$$

Sachant que, par dérivation vectorielle, on a :

$$\begin{aligned} \forall i \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket, \left. \frac{d\overrightarrow{O_iO_{i+1}}}{dt} \right|_0 &= \left. \frac{d\overrightarrow{O_iO_{i+1}}}{dt} \right|_i + \overrightarrow{\Omega_{i/0}} \wedge \overrightarrow{O_iO_{i+1}} \\ &= \overrightarrow{V_{O_{i+1},i+1/i}} + \overrightarrow{\Omega_{i/0}} \wedge \overrightarrow{O_iO_{i+1}} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\overrightarrow{O_{n-1}A}}{dt} \right|_0 &= \left. \frac{d\overrightarrow{O_{n-1}A}}{dt} \right|_{n-1} + \overrightarrow{\Omega_{n-1/0}} \wedge \overrightarrow{O_{n-1}A} \\ &= \overrightarrow{V_{A,n/n-1}} + \overrightarrow{\Omega_{n-1/0}} \wedge \overrightarrow{O_{n-1}A} \\ &= \overrightarrow{V_{A,n/n-1}} + \sum_{i=0}^{n-2} \overrightarrow{\Omega_{i+1/i}} \wedge \overrightarrow{O_{n-1}A} \end{aligned}$$

il vient alors par somme :

$$\overrightarrow{V_{A,n/0}} = \overrightarrow{V_{A,n/n-1}} + \sum_{i=0}^{n-2} \left[ \overrightarrow{V_{O_{i+1},i+1/i}} + \overrightarrow{\Omega_{i+1/i}} \wedge \overrightarrow{O_{n-1}A} + \overrightarrow{\Omega_{i/0}} \wedge \overrightarrow{O_iO_{i+1}} \right]$$

Sachant

$$\sum_{i=0}^{n-2} \overrightarrow{\Omega_{i/0}} \wedge \overrightarrow{O_iO_{i+1}} = \sum_{i=1}^{n-2} \overrightarrow{\Omega_{i/0}} \wedge \overrightarrow{O_iO_{i+1}} = \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=0}^{i-1} \overrightarrow{\Omega_{j+1/j}} \wedge \overrightarrow{O_{i+1}O_{n-1}} = \sum_{i=0}^{n-3} \overrightarrow{\Omega_{i+1/i}} \wedge \overrightarrow{O_{i+1}O_{n-1}}$$

par somme double triangulaire, il vient alors :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V_{A,n/0}} &= \overrightarrow{V_{A,n/n-1}} + \underbrace{\overrightarrow{V_{O_{n-1},n-1/n-2}} + \overrightarrow{\Omega_{n-1/n-2}} \wedge \overrightarrow{O_{n-1}A}}_{\overrightarrow{V_{A \in n-1/n-2}}} \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n-3} \left[ \underbrace{\overrightarrow{V_{O_{i+1},i+1/i}} + \overrightarrow{\Omega_{i+1/i}} \wedge \overrightarrow{O_{i+1}O_{n-1}} + \overrightarrow{\Omega_{i+1/i}} \wedge \overrightarrow{O_{n-1}A}}_{\overrightarrow{V_{A \in i+1/i}}} \right] \\ &= \overrightarrow{V_{A,n/n-1}} + \sum_{i=0}^{n-2} \overrightarrow{V_{A \in i+1/i}} \end{aligned}$$

Ce qui montre la relation de composition des vitesses. Pour chaque vitesse de la somme, on met en exergue le fait que  $A$  est pris fixe dans  $\mathcal{R}_{i+1}$  alors que « naturellement » il appartient au repère  $\mathcal{R}_n$ . Donc, pour tout  $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $\overrightarrow{V_{A \in i+1/i}}$  est la vitesse d'entraînement du point  $A$ , considéré fixe dans  $\mathcal{R}_{i+1}$  par rapport à  $\mathcal{R}_i$ .  $\square$

### 4.3 Composition des torseurs cinématiques

Les deux équations des théorèmes 4.1 et 4.2 nous permettent d'en déduire une loi de composition générale.

#### Théorème 4.3

*La loi de composition des mouvements de solides s'écrit dans le cas général :*

$$\{\mathcal{V}_{S/\mathcal{R}_1}\} = \{\mathcal{V}_{S/\mathcal{R}_n}\} + \{\mathcal{V}_{\mathcal{R}_n/\mathcal{R}_{n-1}}\} + \cdots + \{\mathcal{V}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}\}$$

### 4.4 Composition des accélérations

Par définition l'accélération  $\overrightarrow{\Gamma_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_1}}$  est la variation du vecteur vitesse  $\overrightarrow{V_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_1}}$  par unité de temps. On écrit :

$$\overrightarrow{\Gamma_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_1}} = \left. \frac{d\overrightarrow{V_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_1}}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_1}$$

#### Remarque 4.2

Attention, le champ d'accélération d'un solide  $\mathcal{S}$  n'est pas un champ de torseur. Il n'existe pas d'équation permettant de passer de l'accélération d'un point  $A$  à l'accélération d'un point  $B$  directement. Pour cela, on repassera toujours par la vitesse des points et la définition de l'accélération.

Il est néanmoins possible de composer les accélérations par rapport à plusieurs repères. Les expressions restent simples tant que l'on reste dans le cadre de trois solides en mouvements relatifs. Cela restreindra le cadre de la démonstration.

#### Théorème 4.4

*Si trois solides de repères  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  sont en mouvements relatifs, alors l'expression de l'accélération du point  $A$ , fixe dans le repère  $\mathcal{R}$ , par rapport au repère  $\mathcal{R}_1$  peut être décomposée selon :*

$$\overrightarrow{\Gamma_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_1}} = \overrightarrow{\Gamma_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_2}} + \overrightarrow{\Gamma_{A,\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}} + 2\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}} \wedge \overrightarrow{V_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_2}}$$

avec :

- $\overrightarrow{\Gamma_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_1}}$  l'accélération absolue du point  $A$  dans le référentiel  $\mathcal{R}_1$  ;
- $\overrightarrow{\Gamma_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_2}}$  l'accélération relative du point  $A$  dans le référentiel  $\mathcal{R}_2$  ;

- $\overrightarrow{\Gamma_{A,\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}}$  l'accélération d'entraînement du point  $A$  considéré comme fixe dans  $\mathcal{R}_2$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}_1$  ;
- $2\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}} \wedge \overrightarrow{V_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_1}}$  l'accélération de Coriolis.

*Démonstration.* Pour démontrer la composition des accélérations, on exploite la composition des vitesses :

$$\overrightarrow{V_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_1}} = \overrightarrow{V_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_2}} + \overrightarrow{V_{A \in \mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}}$$

On dérive par rapport au temps dans le référentiel  $\mathcal{R}_1$ , ce qui donne :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Gamma_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_1}} &= \left. \frac{d\overrightarrow{V_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_2}}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_1} + \left. \frac{d\overrightarrow{V_{A \in \mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_1} \\ &= \left. \frac{d\overrightarrow{V_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_2}}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_2} + \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}} \wedge \overrightarrow{V_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_2}} + \left. \frac{d}{dt} \left[ \overrightarrow{V_{O_2,\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}} + \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}} \wedge \overrightarrow{O_2A} \right] \right|_{\mathcal{R}_1} \\ &= \overrightarrow{\Gamma_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_2}} + \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}} \wedge \overrightarrow{V_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_2}} + \left. \frac{d\overrightarrow{V_{O_2,\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_1} + \left. \frac{d \left( \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}} \wedge \overrightarrow{O_2A} \right)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_1} \\ &= \overrightarrow{\Gamma_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_2}} + \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}} \wedge \overrightarrow{V_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_2}} + \overrightarrow{\Gamma_{O_2,\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}} + \left. \frac{d\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{O_2A} \\ &\quad + \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}} \wedge \left. \frac{d\overrightarrow{O_2A}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_1} \\ &= \overrightarrow{\Gamma_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_2}} + \overrightarrow{\Gamma_{O_2,\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}} + \left. \frac{d\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{O_2A} + \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}} \wedge \overrightarrow{V_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_2}} \\ &\quad + \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}} \wedge \left( \left. \frac{d\overrightarrow{O_2A}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_2} + \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}} \wedge \overrightarrow{O_2A} \right) \\ &= \overrightarrow{\Gamma_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_2}} + \overrightarrow{\Gamma_{O_2,\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}} + \left. \frac{d\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{O_2A} + \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}} \wedge \left( \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}} \wedge \overrightarrow{O_2A} \right) \\ &\quad + 2\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}} \wedge \overrightarrow{V_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_1}} \\ &= \overrightarrow{\Gamma_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_2}} + \overrightarrow{\Gamma_{A,\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}} + 2\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}} \wedge \overrightarrow{V_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_1}} \end{aligned}$$

□

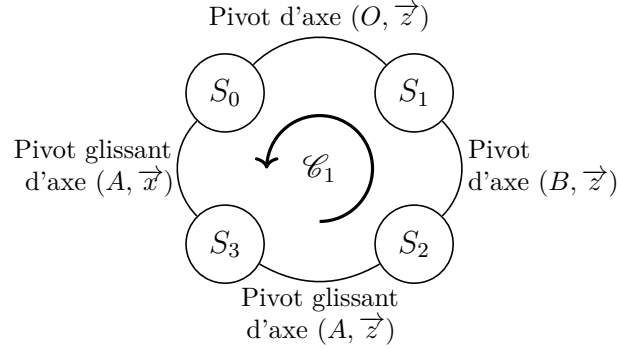
## 4.5 Application de la composition des mouvements : fermeture cinématique

Dans cette partie on aborde, au travers d'un exemple, un cas d'utilisation très courant de la composition des mouvements : l'écriture de la fermeture cinématique. Ces fermetures permettent de déterminer les lois entrées-sorties des mécanismes. Contrairement à celles déterminées par la fermeture géométrique, ces lois vont porter sur les grandeurs cinématiques que sont les vitesses de rotation et les vitesses de translation. En règle générale, on

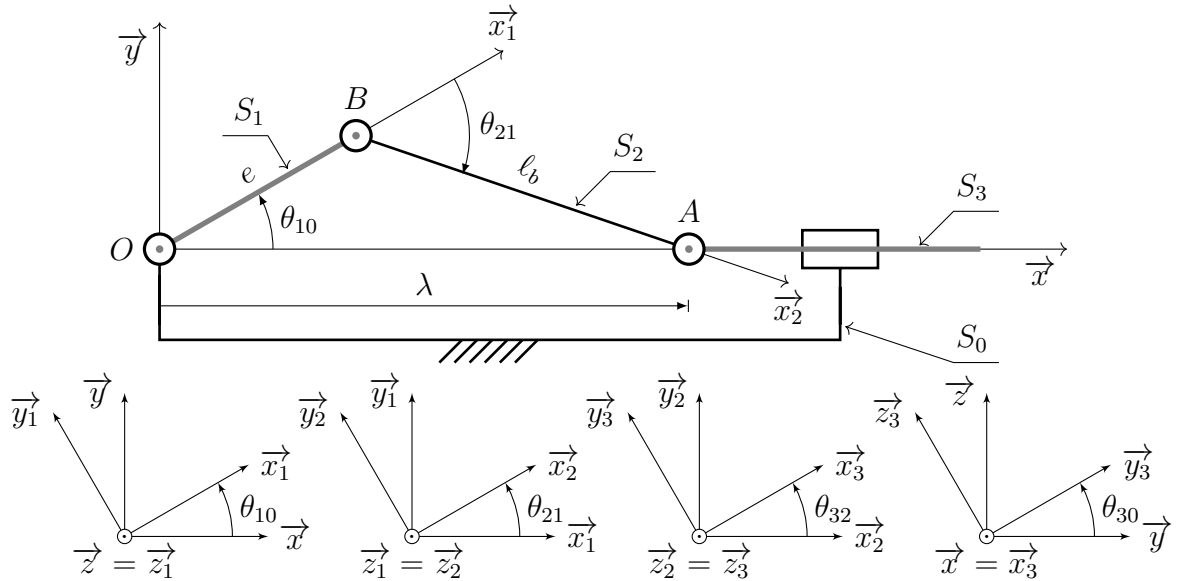
peut écrire autant de fermetures cinématiques que le nombre cyclomatique du graphe de liaisons du mécanisme.

#### Exemple 4.1 (Moteur thermique d'aéromodélisme)

On reprend à titre d'exemple le mécanisme « bielle-manivelle » du moteur d'aéromodélisme.



Le graphe des liaisons du mécanisme fait apparaître un seul cycle ( $\mathcal{C}_1$ ). Il est donc possible d'écrire une seule fermeture cinématique portant sur les torseurs cinématiques conduisant à deux équations vectorielles. On rappelle ci-dessous le schéma cinématique du système et les figures géométrales de paramétrage.



La fermeture cinématique s'écrit simplement par une composition des mouvements en passant par chaque liaison du cycle du graphe de liaisons. On peut écrire par exemple :

$$\{\mathcal{V}_{1/0}\} + \{\mathcal{V}_{0/3}\} + \{\mathcal{V}_{3/2}\} + \{\mathcal{V}_{2/1}\} = \{0\} \quad (1)$$

Il ne reste plus qu'à exprimer chaque torseur des liaisons :



- Liaison 1/0 : liaison pivot d'axe  $(O, \vec{z}) : \{\mathcal{V}_{1/0}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \dot{\theta}_{10} \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_O$
- Liaison 2/1 : liaison pivot d'axe  $(B, \vec{z}) : \{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{2/1}} = \dot{\theta}_{21} \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B$
- Liaison 3/2 : liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z}) : \{\mathcal{V}_{3/2}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{3/2}} = \dot{\theta}_{32} \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$
- Liaison 3/0 : liaison pivot glissant d'axe  $(A, \vec{x}) : \{\mathcal{V}_{3/0}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{3/0}} = \dot{\theta}_{30} \vec{x} \\ \dot{\lambda} \vec{x} \end{Bmatrix}_A$

**Pour faire la somme algébrique de ces torseurs, il faut écrire (réduire) tous les torseurs au même point.** On choisit le point  $B$  (seul point pour lequel la composition des vitesses ne fera pas intervenir  $\dot{\theta}_{21}$ ). Changer de point un torseur nécessite l'utilisation de la relation de changement de point ou équation de Varignon (propriété de champ de vitesse) donnée par le théorème 3.1.

$$\begin{aligned} \{\mathcal{V}_{1/0}\} &= \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \dot{\theta}_{10} \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_O = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_{10} \vec{z} \\ e \dot{\theta}_{10} \vec{y}_1 \end{Bmatrix}_B \\ \text{car } \overrightarrow{V_{B,1/0}} &= \underbrace{\overrightarrow{V_{O,1/0}}}_{\vec{0}} + \dot{\theta}_{10} \vec{z} \wedge \overrightarrow{OB} = e \dot{\theta}_{10} \vec{z} \wedge \vec{x}_1 = e \dot{\theta}_{10} \vec{y}_1 \\ \{\mathcal{V}_{3/2}\} &= \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{3/2}} = \dot{\theta}_{32} \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_{32} \vec{z} \\ -\ell_b \dot{\theta}_{32} \vec{y}_2 \end{Bmatrix}_B \\ \text{car } \overrightarrow{V_{B,3/2}} &= \underbrace{\overrightarrow{V_{A,3/2}}}_{\vec{0}} + \dot{\theta}_{32} \vec{z} \wedge \overrightarrow{AB} = -\ell_b \dot{\theta}_{32} \vec{z} \wedge \vec{x}_2 = -\ell_b \dot{\theta}_{32} \vec{y}_2 \\ \{\mathcal{V}_{3/0}\} &= \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{3/0}} = \dot{\theta}_{30} \vec{x} \\ \dot{\lambda} \vec{x} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_{30} \vec{x} \\ \dot{\lambda} \vec{x} - \ell_b \dot{\theta}_{30} \sin(\theta_{21} + \theta_{10}) \vec{z} \end{Bmatrix}_B \\ \text{car } \overrightarrow{V_{B,3/0}} &= \underbrace{\overrightarrow{V_{A,3/0}}}_{\dot{\lambda} \vec{x}} + \underbrace{\dot{\theta}_{30} \vec{x} \wedge \overrightarrow{AB}}_{-\ell_b \dot{\theta}_{30} \sin(\theta_{21} + \theta_{10}) \vec{z}} = \dot{\lambda} \vec{x} - \ell_b \dot{\theta}_{30} \sin(\theta_{21} + \theta_{10}) \vec{z} \end{aligned}$$

La fermeture cinématique, équation 1, est donc équivalente à deux équations vectorielles :

$$\begin{cases} \dot{\theta}_{10} \vec{z} - \dot{\theta}_{30} \vec{x} + \dot{\theta}_{32} \vec{z} + \dot{\theta}_{21} \vec{z} = \vec{0} \\ e \dot{\theta}_{10} \vec{y}_1 - \dot{\lambda} \vec{x} + \ell_b \sin(\theta_{21} + \theta_{10}) \dot{\theta}_{30} \vec{z} - \ell_b \dot{\theta}_{32} \vec{y}_2 = \vec{0} \end{cases} \quad (2)$$

La loi entrée-sortie doit être une relation liant  $\dot{\theta}_{10}$  et  $\dot{\lambda}$ . On élimine  $\dot{\theta}_{32}$  et  $\dot{\theta}_{30}$  en projetant l'équation 2 sur un vecteur orthogonal à  $\vec{y}_2$  et  $\vec{z}$ , donc  $\vec{x}_2$ . Il vient alors :

$$e \dot{\theta}_{10} \sin \theta_{21} - \dot{\lambda} \cos(\theta_{21} + \theta_{10}) = 0$$

Vous pouvez vous « amuser » à démontrer que cette équation est une combinaison linéaire des dérivées des équations obtenues grâce à la fermeture géométrique.

► ► ► *Pour aller plus loin...*

Le problème avec une approche géométrique est que l'on trouve presque toujours, une équation non linéaire à résoudre. Dans une approche cinématique les inconnues sont les vitesses, par exemple ici  $\dot{\theta}_{10}$  et  $\dot{\lambda}$ . Or à chaque instant  $t$ , si on connaît la configuration géométrique (définie dans notre exemple par  $e$ ,  $\theta_{10}$  et  $\theta_{21}$ ), alors le système à résoudre est linéaire. Cette propriété de linéarité est primordiale en vue d'une résolution numérique du problème. Dans notre exemple la sortie est définie par une équation de la forme  $\dot{\lambda} = a\dot{\theta}_{10}$  avec  $a = \frac{e \sin \theta_{21}}{\cos(\theta_{21} + \theta_{10})}$ . Il ne reste plus qu'à mettre à jour les valeurs des angles à l'instant  $t + \Delta t$  par une équation de la forme  $\theta_{10}(t + \Delta t) = \theta_{10}(t) + \dot{\theta}_{10} \Delta t$  pour recommencer la résolution du système linéaire à l'instant  $t + \Delta t$ .

## 4.6 Mouvements plans sur plans

### Définition 4.1 (Mouvement plan)

Un solide est en mouvement plan dans un référentiel si tous ses points se déplacent dans des plans parallèles à un plan fixe de ce référentiel.

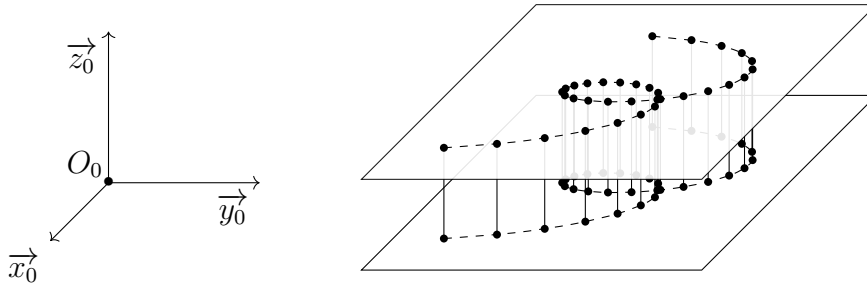


FIGURE 4 – Mouvement plan d'un solide  $\mathcal{S}$  par rapport à un référentiel  $\mathcal{R}_0$ .

Dans le cas d'un mouvement plan, deux paramètres linéaires suffisent à décrire les variations de positions de l'origine et un seul paramètre angulaire suffit à orienter la base mobile associés à un solide par rapport à un référentiel (figure 5). Un solide en mouvement plan par rapport à un référentiel possède donc au maximum trois degrés de liberté.

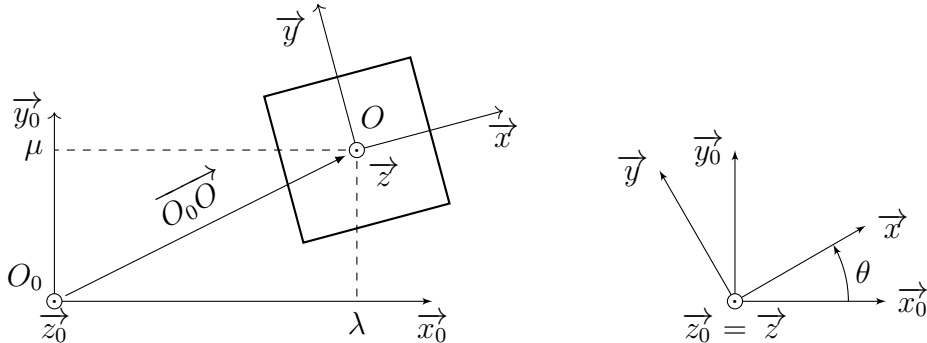


FIGURE 5 – Paramétrage du mouvement plan d'un solide  $\mathcal{S}$  dans un référentiel  $\mathcal{R}_0$ .

Si, comme illustré par la figure 5, le mouvement des points d'un solide  $\mathcal{S}$  se fait dans des plans parallèles de normale  $\vec{z}_0$ , la position du repère associé à  $\mathcal{S}$  sera complètement définie par le vecteur position  $\overrightarrow{O_0O} = \lambda(t) \vec{x}_0 + \mu(t) \vec{y}_0 + \rho \vec{z}_0$  avec  $\rho$  une constante telle que la vitesse du point  $O$  s'écrive :

$$\overrightarrow{V_{O,S/\mathcal{R}_0}} = \dot{\lambda}(t) \vec{x}_0 + \dot{\mu}(t) \vec{y}_0$$

et vérifie :

$$\overrightarrow{V_{O,S/\mathcal{R}_0}} \cdot \vec{z}_0 = 0$$

L'orientation de la base associée à  $\mathcal{S}$  sera, quant à elle, complètement définie avec un seul angle  $\theta$  autour de l'axe  $\vec{z}_0$ , tel que le vecteur rotation s'écrive  $\overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}_0}} = \dot{\theta} \vec{z}$ . En exploitant la formule de changement de point, il vient :

$$\overrightarrow{V_{O,S/\mathcal{R}_0}} \cdot \vec{z}_0 = \left( \overrightarrow{V_{M,S/\mathcal{R}_0}} + \overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}_0}} \wedge \overrightarrow{MO} \right) \cdot \vec{z}_0 = 0$$

de sorte que la vitesse de chaque point  $M$  du solide  $\mathcal{S}$  vérifie :

$$\overrightarrow{V_{M,S/\mathcal{R}_0}} \cdot \vec{z}_0 = 0$$

### Remarque 4.3

Dans le cas particulier des mouvements plans, les torseurs cinématiques des liaisons (table 1) peuvent être simplifiés afin de respecter la forme des vecteurs vitesse et rotation.

\*      \*

\*