Fiche 31 : Théorème des suites monotones.

Exercice 1

On considère la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

1. Montrer que $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante.
2. Montrer que $H_{2^{n+1}} - H_{2^n} \geq \frac{1}{2}$.
3. En déduire la limite de $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 2

1. Montrer que pour tout $x > 0$, $\sin(x) < x$.
2. Étudier la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = a \in \left]0, \pi/2\right] \\ (\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} = \sin(u_n) \end{cases}$$

Exercice 3

On pose $u_0 = 1, v_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

1. Montrer que si $0 < a < b$ alors :

$$a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b$$

2. Montrer les suites (u_n) et (v_n) sont monotones et convergent vers la même limite l (qu'on ne demande pas de calculer !).
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_{n+1} - u_{n+1} \leq (v_n - u_n)^2$ puis :

$$v_n - u_n \leq \frac{1}{10^{2^{n-1}}}$$

Exercice 4 : Méthode de Newton sur un exemple

On considère la fonction $f(x) = x^2 - 2$ définie sur $\mathbb{R}$ et la fonction $g(t) = \frac{1}{2}\left(t + \frac{2}{t}\right)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$.
   (a) Déterminer l'équation de la tangente T_t en $(t, f(t))$ au graphique de la fonction f.
   (b) Faire un dessin et montrer que $g(t)$ est l'abscisse de l'intersection de T_t avec l'axe des abscisses.
2. On considère maintenant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = g(u_n)$$

   (a) Montrer que , pour tout $n \in \mathbb{N}$: u_n existe et $u_n > \sqrt{2}$.
   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   (c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et préciser sa limite.
   (d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - \sqrt{2} \leq (u_n - \sqrt{2})^2$$

   (e) Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ qu'on précisera tel que si $n \geq N$:

$$u_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^{2^n}}$$